

SERIE A, N°
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Ahmed TOUNSI

1^{re} THESE. — "Pôles de Regge et diffusion π -N à basse et moyenne énergie".

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10/7/1970 devant la Commission d'examen.

MM. R. NATAF *Président.*

R. VINH MAU
W.N. COTTINGHAM } *Examineurs.*
K. KANG

SÉRIE A, n°
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Ahmed TOUNSI

1^{re} THESE. — "Pôles de Regge et diffusion π -N à basse et moyenne énergie".

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10/7/1970 devant la Commission d'examen.

MM. R. NATAF *Président.*

R. VINH MAU
W. N. COTTINGHAM } *Examineurs.*
K. KANG



à

Pierre Labrot

et

Hocine Menasseri

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à la Division de Physique Théorique de l'Institut de Physique Nucléaire. Je remercie Monsieur le Professeur M. Jean d'avoir bien voulu m'y accueillir.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur R. Nataf de l'intérêt qu'il a porté à ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur R. Vinh Mau qui a assuré la direction de cette recherche et dont les conseils efficaces et les encouragements m'ont permis de la mener à bien.

L'aide de Monsieur le Professeur W.N. Cottingham m'a été très précieuse: je l'en remercie vivement. Je remercie également le Dr. H. Høgaasen pour ses suggestions décisives dans la phase initiale de ce travail.

Les résultats présentés ici constituent une partie de ceux que nous avons obtenus, Monsieur J. Letessier et moi-même, au cours d'une collaboration intéressante et fructueuse. Je tiens à l'en remercier sincèrement.

Les calculs numériques ont été effectués sur l'Univac 1108 d'Orsay et sur la C.D.C. 6.600 de Paris. Je remercie ici tous les membres des divers bureaux de calcul, qui m'ont conseillé dans la mise au point des programmes.

Je ne voudrais pas oublier les physiciens du Laboratoire avec qui j'ai eu d'intéressantes discussions, et je tiens tout particulièrement à remercier Mademoiselle Moreau et Madame P. Gauron qui se sont chargées de la réalisation matérielle de cette thèse.

Enfin, je suis très reconnaissant au Centre National de la Recherche Scientifique pour son aide financière.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

1

CHAPITRE I

I - Cinématique.	9
II - Symétrie de croisement.	10
III - Amplitudes invariantes $A(s,t)$ et $B(s,t)$.	11
IV - Indépendance de charge.	12
V - Analyse en ondes partielles.	13
VI - Propriétés analytiques des ondes partielles.	14
VII - Prolongement analytiques des ondes partielles dans le plan du moment angulaire. Contributions des pôles de fermions.	15

CHAPITRE II

I - Règles de somme à énergie finie.	19
I.1 Règles de superconvergence.	19
I.2 Règles de somme à énergie finie.	20
II - Application des règles de somme à énergie finie.	22
III - Notion de dualité globale.	25
IV - Conséquences immédiates de la dualité globale.	26
V - Notion de dualité locale.	27
VI - Boucles de C. Schmid et facteurs de signature.	30
VII - Objections contre l'interprétation de C. Schmid. Discussion.	31

CHAPITRE III

I	- Méthode N/D modifiée.	34
II	- Recherche des résonances.	38
III	- Construction de $B_{\ell}^P(s)$ dans le modèle de Chew-Jones.	41
IV	- Construction de $B_{\ell}^P(s)$ dans notre modèle.	42
V	- Résolution de l'équation intégrale sur $N_{\ell}(s)$.	48
VI	- Application à la réaction d'échange de charge $\pi\pi$.	50
VII	- Application à la diffusion $\pi\pi$.	52
	1°) Choix des amplitudes de Regge.	52
	2°) Résultats relatifs aux résonances.	57
	3°) Résultats relatifs aux sections efficaces.	59
	4°) Conclusions.	61

CHAPITRE IV

I	- Comportement asymptotique des ondes partielles unitarisées.	63
II	- Introduction de l'inélasticité.	65
III	- Modèle pour $R_{\ell}(s)$.	68
CONCLUSION		70
REFERENCES		73
LEGENDES DES TABLEAUX		79
TABLEAUX		80
LEGENDES DES FIGURES		84
FIGURES		87

INTRODUCTION

Si par théorie physique on entend une construction qui, à partir d'un certain nombre de principes, permet d'expliquer un ensemble de phénomènes et, éventuellement, d'en prévoir d'autres, on peut dire qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de théorie des interactions fortes. En l'absence de théorie générale, on essaie des modèles. Incontestablement le modèle de Regge⁽¹⁾, malgré ses hauts et ses bas, sert de guide, depuis quelques années, à un grand nombre de physiciens des hautes énergies⁽²⁾.

Le modèle de Regge, en théorie relativiste des particules élémentaires⁽³⁾, est une transposition des résultats obtenus en théorie du potentiel. Avec des potentiels, superpositions de potentiels de Yukawa, Regge⁽¹⁾ a montré que l'amplitude totale :

$$F(E, \cos \theta) = \sum_{\ell} (2\ell+1) f_{\ell}(E) P_{\ell}(\cos \theta)$$

pouvait s'écrire, à l'aide d'une transformation de Sommerfeld-Watson⁽⁴⁾,

$$F(E, z) = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (2\ell+1) f(\ell, E) \frac{P_{\ell}(-z) d\ell}{\sin \pi \ell} \quad (i.1)$$

$$- \sum_i \pi (2\alpha_i+1) \beta_i \frac{P_{\alpha_i}(-z)}{\sin \pi \alpha_i}$$

où $z = \cos \theta$, E désigne l'énergie et où $f(\ell, E)$ est une fonction unique de ℓ complexe qui interpole la fonction $f_{\ell}(E)$ pour $\ell=0,1,2,\dots$. L'unicité repose sur un théorème de Carlson⁽⁵⁾ dont les conditions sont satisfaites pour des potentiels de Yukawa.

Dans (i.1) les $\alpha_i(E)$ sont les pôles de $f(\ell, E)$ dans

le plan complexe du moment angulaire l et les β_i sont les résidus correspondants. Ces pôles dont la position dans le plan complexe (l) varie avec l'énergie s'appellent pôles de Regge ou trajectoires de Regge. C'est leur interprétation physique qui leur confère un très grand intérêt; ils correspondent, soit à des états liés, soit à des résonances lorsque $\text{Re}\alpha_i$ passe par une valeur entière non négative^(1,2). En présence d'un potentiel d'échange ou en théorie relativiste (voir chapitre I) le prolongement analytique de $f_l(E)$ pour l complexe doit se faire séparément pour les ondes paires et les ondes impaires, si l'on veut satisfaire aux conditions d'unicité du théorème de Carlson. On obtient dans ce cas :

$$F(E, z) = BI^+ + BI^- - \frac{\Gamma(2\alpha^\pm + 1)}{\alpha^\pm} \frac{1}{2} \frac{P_{\alpha^\pm}(-z) - P_{\alpha^\pm}(z)}{\sin \pi \alpha^\pm} \quad (i.2)$$

où BI^+ et BI^- sont des intégrales du même type que celle qui figure dans (i.1) pour $f^+(l, E)$ et $f^-(l, E)$ avec :

$$\begin{aligned} f^+(l, E) &= f_l(E) & \text{pour } l &= 0, 2, 4, \dots \\ f^-(l, E) &= f_l(E) & \text{pour } l &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Les amplitudes $f^+(l, E)$ et $f^-(l, E)$ sont dites respectivement de signature positive et négative. Les pôles, distincts, correspondants α_i^+ et α_i^- ne s'interprètent comme résonances ou états liés que pour les valeurs paires de $\text{Re}\alpha_i^+$ et pour les valeurs impaires de $\text{Re}\alpha_i^-$. Les valeurs impaires de $\text{Re}\alpha_i^+$ ne correspondent pas à des états physiques de même que les valeurs paires de $\text{Re}\alpha_i^-$: deux états physiques successifs sur une trajectoire de signature donnée sont espacés de $\Delta l = 2$. Il peut se faire que les forces d'échange soient nulles ou négligeables. Alors les trajectoires α_i^+ et α_i^- sont confondues : on dit qu'il y a dégénérescence d'échange.

En théorie relativiste où le prolongement analytique

des ondes partielles $f_l(E)$ se fait à l'aide de la formule de Froissart-Gribov, on suppose que l'amplitude admet la représentation (i.2) (avec en plus, éventuellement, les contributions dues à d'autres singularités que des pôles mobiles) et on dispose du principe du croisement⁽³⁾ (voir chapitre I) pour relier le comportement de l'amplitude à haute énergie, aux trajectoires échangées dans les voies croisées (voir chapitre I). Si l'on veut le comportement à haute énergie dans la voie directe s , on effectue la transformation de Sommerfeld-Watson dans la voie croisée t pour obtenir la relation (i.2), mais où E est remplacée par t et où z désigne le cosinus de l'angle de diffusion dans la voie t . En faisant tendre z à l'infini, en tenant compte de :

$$F_l(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{(2x)^\alpha}{\sqrt{\pi}} \quad \text{pour } \operatorname{Re} \alpha > -\frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 0$$

et en négligeant la contribution des intégrales, on obtient, en redéfinissant les résidus,

$$F(t, z_t) \rightarrow \sum_{\alpha_i} \beta_i(t) \frac{1 + \zeta_i e^{-i\pi\alpha_i(t)}}{\sin \pi \alpha_i(t)} (-z_t)^{\alpha_i(t)} \quad (i.3)$$

où ζ_i désigne la signature de $\alpha_i(t)$.

Mais $z_t \rightarrow \infty$ signifie d'après la relation :

$$z_t = \cos \theta_t = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2} \quad (\text{cas de masses égales})$$

que $s \rightarrow \infty$. La relation (i.3) pour s grand et $t < 0$ fixé représente, d'après le principe du croisement, l'amplitude à haute énergie dans la voie s . On peut écrire :

$$F(s, \cos \theta_s) \rightarrow \sum_{\alpha_i} \beta_i(t) \frac{1 + \zeta_i e^{-i\pi\alpha_i(t)}}{\sin \pi \alpha_i(t)} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_i(t)} \quad (i.4)$$

$$s \rightarrow \infty$$

où $\overline{s}_0$ est en facteur d'échelle.

Pratiquement, on considère qu'à partir d'une certaine énergie, le premier membre de (1.4) est égal au second membre.

Dans le modèle périphérique classique⁽⁷⁾ l'échange, dans la voie t d'une particule de masse μ et de spin fixé J conduit à une amplitude de la forme ;

$$F_a(t) \frac{1}{\mu^2 - t} F_b(t) P_J(\cos \theta_+)$$

qui donne, dans la voie s , pour s grand, un comportement en s^J . L'échange d'une particule de spin fixé supérieur à 1 correspond à des sections efficaces croissant avec l'énergie ce qui est en désaccord avec l'expérience et aussi avec la borne de Froissart⁽⁶⁾. Le modèle de Regge apparaît comme une généralisation du modèle d'échange, mais où les objets échangés ont des nombres quantiques bien définis, et dont le spin est variable avec t . Pour éviter les inconvénients du modèle d'échange de particules à spin fixé, il suffit de supposer que $\alpha_i(t) \leq 1$ pour $t \leq 0$. En outre, si $\alpha_p(t)$ est la trajectoire dominante pour l'amplitude de diffusion élastique, c'est-à-dire si $\text{Re } \alpha_p(t) \geq \text{Re } \alpha_i(t)$ pour tout i , le théorème optique ($\sigma_T(s) \rightarrow \frac{1}{s} \text{Im } F_{\text{élas}}(s, t=0)$ pour $s \rightarrow \infty$) et l'hypothèse, suggérée par l'expérience que $\sigma_T(s) \rightarrow \text{cte}$, impliquent que $\alpha_p(0) = 1$. Ce pôle de signature $\zeta=+1$ et dont les nombres quantiques sont ceux du vide⁽²⁾ porte le nom de Pomeranchuk.

Il ne saurait être question dans cette introduction à notre travail de faire une analyse détaillée des résultats obtenus à l'aide du modèle de pôles de Regge. Notons que d'une manière générale il semble fournir un cadre adéquat pour rendre compte de la structure des sections efficaces à haute énergie : expérimentalement, elles obéissent en effet à une loi⁽⁸⁾ de la forme s^{-n} où $0 < n < 4$ dépend du système de nombres quantiques

échangés ; en outre les sections efficaces (à deux corps) ne sont piquées vers l'avant (ou vers l'arrière) que s'il existe des particules qu'on peut échanger dans les voies t ou u)

Pour limiter le nombre de paramètres libres, il y a évidemment intérêt, en vue d'une confrontation avec l'expérience, à choisir les réactions où n'interviennent qu'une ou deux trajectoires. Bien entendu, les expériences font intervenir des particules possédant un spin. Dans ce cas, la méthode de reggeisation que nous avons décrite plus haut dans le cas de particules sans spin, s'applique aux amplitudes d'hélicité⁽⁹⁾ débarrassées de leurs singularités cinématiques⁽¹⁰⁾ (régularisées). Pour une amplitude réduite à la contribution d'un seul pôle la section efficace différentielle a la forme :

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx f(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2\alpha(t)-2} \approx f(t) e^{2(\alpha(t)-1) \log\left(\frac{s}{s_0}\right)} \quad (i.5)$$

Puisque $\alpha(t) < 1$, on prévoit un rétrécissement du pic vers l'avant quand l'énergie augmente. Dans les réactions $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ et $\pi^- p \rightarrow \eta n$, les traits généraux des sections efficaces sont bien reproduits (comportement à haute énergie, rétrécissement du pic vers l'avant) et les trajectoires, supposées linéaires ($\alpha = \alpha(0) + \alpha' t$), déterminées par ajustements (fit) passent bien par les positions du ρ et du A_2 sur le diagramme de Chew-Frauchi qui représente $Re\alpha$ en fonction de t . De même les trajectoires du N_α et du Δ_8 obtenues⁽¹¹⁾ par ajustement dans $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+$ sont en très bon accord avec leur prolongement pour $t > 0$ sur le diagramme de Chew-Frauchi. D'une manière générale il semble bien que les particules aient tendance à se placer sur des trajectoires linéaires.

D'autres traits des sections efficaces différentielles semblent pouvoir s'expliquer à l'aide du modèle des pôles de Regge. Ainsi certains minima (dips) sont attribués au passage de

$\alpha(t)$ par des points de mauvaise signature⁽¹²⁾. Par exemple, dans $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, le passage de $\alpha_\rho(t)$ par la valeur 0 (mauvaise signature et non-sens)⁽¹²⁾ correspond bien à un minimum observé à $t=-0.6$; de même dans $\pi^+ p \rightarrow \pi^- p$ au point $\alpha_{N\alpha} = -\frac{1}{2}$. Des explications⁽¹²⁾ du "cross over", c'est-à-dire du changement de signe de $\Delta(AB) = \frac{d\sigma}{dt}(AB) - \frac{d\sigma}{dt}(\bar{A}\bar{B})$, ont été proposées dans le cadre du modèle des pôles de Regge, mais elles se heurtent à des difficultés liées à la factorisation des résidus⁽¹³⁾. Malgré certains succès, les explications des "dips" et des "cross over", ne semblent pas avoir atteint leur version définitive. En outre le modèle à un pôle prévoit toujours une polarisation nulle (en contradiction avec l'expérience) et un rétrécissement du pic vers l'avant qui n'est pas toujours observé. Ce modèle de pôles a dû se compliquer, non seulement en faisant intervenir plusieurs pôles, mais en tenant compte des contributions d'autres singularités dans le plan du moment angulaire. L'existence de coupures et de pôles fixes semblent de plus en plus s'imposer, à la fois pour des raisons théoriques⁽¹⁴⁾ et pour des raisons expérimentales. L'existence de coupures et de pôles fixes^(15,16) détruit le mécanisme de formation des "dips" que nous avons décrit plus haut, sauf peut-être dans les cas où les effets des coupures et des pôles fixes se révèlent négligeables⁽¹²⁾.

Le modèle des pôles de Regge a dû également se compliquer pour satisfaire aux propriétés d'analyticité des amplitudes. D'une manière tout à fait générale la matrice de croisement⁽¹⁰⁾ qui relie les amplitudes d'hélicités régularisées de la voie t à celles de la voie s possède des singularités cinématiques à $t=0$ et à $t = (m_i + m_j)^2$, correspondant aux seuils et aux pseudo-seuils de la voie t ⁽¹⁰⁾. L'élimination de ces singularités, qui ne doivent pas figurer dans les amplitudes de la voie s , imposent des relations de contraintes sur les amplitudes de la voie t . Si on suppose maintenant que ces dernières ont une représen-

tation à la Regge, ces relations de contraintes deviennent des relations de contraintes sur les trajectoires et sur leurs résidus. Ces contraintes peuvent être satisfaites⁽¹⁷⁾, soit par des relations sur les résidus (évasion), soit par des relations sur les trajectoires de nombres quantiques différents (conspiration), soit enfin par l'association à une trajectoire donnée α d'une famille α_n de trajectoires différentes, de mêmes nombres quantiques, mais dont les parités et la signature sont reliées à celles de la trajectoire α par :

$$\tau_n = (-1)^n \tau_\alpha \quad \text{et} \quad \rho_n = (-1)^n \rho_\alpha.$$

Ces trajectoires α_n , dites trajectoires filles, sont reliées en $t = 0$ à la trajectoire parente α par :

$$\alpha_n(0) = \alpha(0) - n$$

L'existence des trajectoires filles s'impose toujours dans le cas des masses inégales⁽¹⁷⁾.

Ainsi, l'association trajectoires-particules physiques est devenue plus complexe qu'on ne le pensait initialement, du fait de l'existence des trajectoires filles et des trajectoires qui "conspirent".

Mais, à côté de ces complications, la combinaison de l'analyticité et du comportement à la Regge pour les amplitudes de diffusion, a conduit récemment^(18,19) à la notion certainement très féconde de dualité. Nous essaierons au chapitre II de préciser le contenu de cette notion. Disons simplement, pour le moment, que la dualité implique une certaine équivalence entre les résonances de la voie directe, à basse et moyenne énergie, et les pôles de Regge dont l'échange, dans les voies croisées, domine l'amplitude à haute énergie dans la voie directe. Ainsi, l'ampli-

tude de Regge, conçue comme amplitude de haute énergie, possède, en un sens que nous préciserons au chapitre II, un certain contenu physique à basse et moyenne énergie. Ce contenu semble en particulier se manifester, à moyenne énergie, par l'existence de boucles sur le diagramme d'Argand⁽²⁰⁾, obtenues dans l'analyse en ondes partielles des amplitudes de Regge : ces boucles rappellent étonnamment celles que donnent les amplitudes de Breit-Wigner représentant des résonances. Et cependant, les amplitudes de Regge ne possèdent pas de pôles dans le second feuillet du plan de l'énergie. L'idée de départ du travail exposé dans cette thèse est de montrer que, à basse et moyenne énergie, les amplitudes de Regge unitarisées peuvent contenir de tels pôles et décrire correctement les résultats expérimentaux. C'est cette tentative d'unitarisation, les problèmes qu'elle pose et les résultats qu'elle nous a permis d'atteindre, que nous présentons ici.

Dans le chapitre I, nous rappelons le formalisme général n -N et nous donnons les formes des contributions des pôles de Regge qui nous serviront. Le chapitre II tend à préciser les notions récentes de dualité globale et locale et les interprétations qu'elles permettent. Dans le chapitre III, après avoir décrit notre méthode nous l'appliquons à des amplitudes utilisées récemment dans le contexte des idées dualistes^(20,21). Nous discutons les résultats obtenus, tant au point de vue des pôles (résonances) que des sections efficaces, en les comparant aux résultats obtenus par divers auteurs^(20,21) sur les diagrammes d'Argand d'une part, et aux résultats expérimentaux d'autre part. Le chapitre IV traite de problèmes relatifs à l'introduction de l'inélasticité dans notre problème et du comportement asymptotique des amplitudes de Regge modifiées.

CHAPITRE I

Dans ce chapitre nous résumons le formalisme général de la diffusion π -N. Nous rappelons les propriétés analytiques dans le plan s des ondes partielles et nous donnons les contributions des pôles de Regge qui nous serviront au chapitre III.

I - Cinématique

Considérons la diffusion π -N représentée par la fig. I.1, où q_1 et q_2 sont les quadrimoments initial et final du méson π de masse μ et p_1 et p_2 ceux du nucléon de masse m . Nous pouvons considérer trois processus

$$\text{I (s) : } \pi_1 + N_1 \rightarrow \pi_2 + N_2$$

$$\text{II (t) : } \pi_1 + \bar{\pi}_2 \rightarrow \bar{N}_1 + N_2$$

$$\text{III (u) : } \bar{\pi}_2 + N_1 \rightarrow \bar{\pi}_1 + N_2$$

où la lettre surmontée d'une barre désigne l'antiparticule. Ces processus définissent par convention les voies I, II, III. L'amplitude est fonction des trois invariants relativistes s, t, u qui désignent le carré de l'énergie totale respectivement dans la voie I, II, III. Dans la voie I on a :

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + q_1)^2 = \left[(m^2 + q_1^2) + (\mu^2 + q_2^2) \right]^2 \equiv s^2 \\ t &= -(q_1 - q_2)^2 = -2q^2(1 - \cos\theta) \\ u &= -(p_1 - p_2)^2 = \left[(m^2 + q_1^2) + (\mu^2 + q_2^2) \right]^2 - 2q^2(1 + \cos\theta) \\ q^2 &= -\frac{1}{2}(s^2 - 2\mu^2 + m^2) \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

où q^2 est le carré des impulsions angulaires initial $\vec{q}$ et final $\vec{q}'$ dans le système du centre de masse :

$$q^2 = \vec{q}^2 = \vec{q}'^2 \quad \text{et} \quad \vec{q} \cdot \vec{q}' = q^2 \cos \theta .$$

On peut de même donner l'expression de s , t , u dans les voies II et III. Les trois invariants s , t , u ne sont pas linéairement indépendants :

$$s + t + u = 2m^2 + 2p^2 . \quad (\text{I.2})$$

On peut montrer⁽²²⁾ que chacun des processus I, II, III correspond à un domaine de variations bien défini des variables s , t , u , qu'on appelle région physique pour le processus correspondant.

Pour le processus I :

$$s \geq (m+p)^2, \quad t \leq 0, \quad \text{et} \quad u \leq \frac{(m^2 - p^2)^2}{s}$$

Pour le processus II :

$$u \geq (m+p)^2, \quad t \leq 0, \quad \text{et} \quad s \leq \frac{(m^2 - p^2)^2}{u}$$

Pour le processus III :

$$t \geq 4m^2, \quad s \leq 0, \quad \text{et} \quad u \leq \frac{(m^2 - p^2)^2}{t}$$

II - Symétrie de croisement

Les processus I, II, III, nous venons de le voir, sont décrits par des amplitudes des trois mêmes variables s , t et u . Ces amplitudes, bien que fonctions des mêmes variables, sont définies dans trois domaines différents des variables s , t , u et tant qu'on ne s'intéresse qu'aux processus physiques, ces trois amplitudes sont complètement déconnectées. Mais on peut prolonger⁽²²⁾ analytiquement la définition de chacune de ces amplitudes à des valeurs non physiques de l'énergie et de l'angle de diffusion. Par exemple, l'amplitude de la voie s peut être prolongée analytiquement en dehors de la région physique, en particulier à des valeurs de s situées dans la région physique de la voie t . Le principe du croisement, ou symétrie de croisement, affirme que l'amplitude de la voie s , prolongée à ces valeurs de s coïncide avec l'amplitude physique

de la voie t. Autrement dit, c'est la même amplitude . fonction analytique des variables s, t, u qui décrit les processus I, II, III, chacun de ces processus ayant effectivement lieu quand les valeurs de s, t, u se trouvent dans la région physique correspondante. La symétrie de croisement joue un rôle capital dans la dynamique des interactions fortes et c'est, en particulier, cette symétrie de croisement qui a permis, comme nous l'avons vu dans l'introduction, de relier le comportement à haute énergie dans la voie s, aux pôles de Regge échangés dans les voies t et u.

III - Amplitudes invariantes de Lorentz

L'élément de matrice S de la diffusion π -N peut s'écrire⁽²³⁾ :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \left(\frac{m^2}{4E_1 E_2 \omega_1 \omega_2} \right)^{1/2} \bar{u}_2 \mathcal{T} u_1 \quad (I.3)$$

où $\omega_i = (\mu^2 + q_i^2)^{1/2}$

$$E_i = (m^2 + p_i^2)^{1/2}$$

et où u_1 et u_2 sont les spineurs de Dirac pour l'état initial et l'état final du nucléon.

On montre^(22,23) alors que :

$$T = -A - i(\not{Q}) B \quad (I.4)$$

où $Q_\mu = \frac{1}{2} (q_{1\mu} + q_{2\mu})$ et où $\not{Q}$ sont les matrices de Dirac. Les amplitudes A et B sont invariantes de Lorentz. A est indépendante du spin du nucléon et B est associée par l'intermédiaire du facteur $(\not{Q})$ au renversement du spin du nucléon. La section efficace différentielle⁽²³⁾ est

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{4\pi W} \right)^2 \sum \bar{u}_2 \mathcal{T} u_1 \quad (I.5)$$

où $\sum$ indique une sommation sur les états finaux de spin et la moyenne sur les états initiaux.

IV - Indépendance de charge

L'indépendance de charge entraîne pour les amplitudes A et B une décomposition^(22,23) de la forme :

$$A = A^+ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [\tau_{\alpha}, \tau_{\beta}] A^- \quad (I.6)$$

$$B = B^+ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [\tau_{\alpha}, \tau_{\beta}] B^- ,$$

où $\vec{\tau}$ représente l'opérateur de spin isotopique du nucléon et où $\alpha = (1,2,3)$ et $\beta = (1,2,3)$ sont respectivement les indices de spin isotopique pour le méson incident et émergent.

L'invariance de l'amplitude $\bar{u}_2 T u_1$ dans le croisement des lignes de mésons ($q_1 \leftrightarrow q_2$ et $\alpha \leftrightarrow \beta$) implique⁽²²⁾ d'après (I.6) que :

$$A^+ (s, t, u) = \bar{A}^+ (u, t, s) \quad (I.7)$$

$$B^+ (s, t, u) = \bar{B}^+ (u, t, s) .$$

Ces amplitudes peuvent évidemment se décomposer dans les différentes voies sur les amplitudes propres de spin isotopique⁽²³⁾. Dans la voie s on a :

$$A^+ = \frac{1}{2} (A^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} A^{\frac{3}{2}})$$

$$A^- = \frac{1}{3} (A^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{3}{2}})$$

et des relations identiques pour B^+ et B^- .

V - Analyse en ondes partielles

Pour effectuer l'analyse en ondes partielles, on introduit^(22,23) deux autres amplitudes f_1 et f_2 fonctions des variables $W = s^{\frac{1}{2}}$ et $\cos \theta$

dans le système du centre de masse. On définit à la place de l'opérateur T agissant sur les spineurs de Dirac, un opérateur M agissant sur les spineurs de Pauli χ_f et χ_i tel que :

$$\langle \chi_f | M | \chi_i \rangle = \dots$$

on montre ⁽²²⁾ alors que M s'écrit de la façon suivante :

$$M = f_1(w, \cos \theta) + \frac{(\sigma \cdot q_1)(\sigma \cdot q_2)}{q_1 q_2} f_2(w, \cos \theta)$$

La section efficace différentielle non polarisée s'écrit simplement

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\langle \chi_f | M | \chi_i \rangle|^2$$

qui donne ⁽²³⁾ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(s, t)|^2 + |g(s, t)|^2 \quad (1.8)$$

avec

$$f(s, t) = f_1 + \cos \theta f_2$$

$$g(s, t) = \sin \theta f_2$$

Ces amplitudes f_1 et f_2 sont reliées aux amplitudes invariantes A et B par :

$$f_1 = \frac{E+m}{8\pi W} [A + (W-m)B] \quad (1.9)$$

$$f_2 = \frac{E-m}{8\pi W} [-A + (W+m)B]$$

où E est l'énergie du nucléon dans le système du centre de masse :

$$E = (W^2 + m^2 - p^2)/2W \quad (1.10)$$

Notons que $f_1(W) = -f_2(-W)$. (1.11)

Les ondes partielles s'obtiennent à partir de f_1 et f_2 . A une valeur donnée J du moment angulaire, le moment orbital prend les valeurs $\ell = J - \frac{1}{2}$ et $\ell = J + \frac{1}{2}$. La conservation de la parité ne permet que les transitions :

$$J - \frac{1}{2} \longrightarrow J - \frac{1}{2}$$

$$J+\frac{1}{2} \longrightarrow J+\frac{1}{2}$$

Les ondes partielles correspondantes sont⁽²⁴⁾ :

$$a_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) [f_1 P_{J-\frac{1}{2}} + f_2 P_{J+\frac{1}{2}}] \quad (\text{I.12})$$

$$a_{J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) [f_1 P_{J+\frac{1}{2}} + f_2 P_{J-\frac{1}{2}}]$$

et inversement on a⁽²⁴⁾ :

$$f_1 = \sum_J a_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^J P'_{J+\frac{1}{2}} - \sum_J a_{J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^J P'_{J-\frac{1}{2}} \quad (\text{I.13})$$

$$f_2 = \sum_J a_{J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^J P'_{J+\frac{1}{2}} - \sum_J a_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^J P'_{J-\frac{1}{2}}$$

où
$$P'_l(\cos \theta) = \frac{d}{d \cos \theta} P_l(\cos \theta)$$

Avec les notations classiques⁽²⁵⁾ :

$$a_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^J = f_{(J-\frac{1}{2})+} \equiv f_{l+} \quad (\text{I.14})$$

$$a_{J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^J = f_{(J+\frac{1}{2})-} \equiv f_{(l+1)-}$$

ce qui donne

$$f_1(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{l+} P'_{l+1}(\cos \theta) - f_{l-} P'_{l-1}(\cos \theta) \quad (\text{I.15})$$

$$f_2(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (f_{l-} - f_{l+}) P'_l(\cos \theta) \quad (\text{I.16})$$

VI - Propriétés analytiques des ondes partielles

La structure analytique des ondes partielles est représentée dans le plan s par la figure (I.2). Elle comporte :

- 1) - Le pôle $s = m^2$ du nucléon dans la voie directe. Ce pôle n'affecte que l'onde $f_{\ell m}^2$.
- 2) - La coupure unitaire $(m + \mu)^2 \leq s \leq \infty$.
- 3) - Deux coupures $(m - \frac{\mu^2}{m})^2 \leq s \leq m^2 + 2\mu^2$ et $-\infty \leq s < 0$ induites par le pôle du nucléon $u = m^2$ dans la voie croisée u .
- 4) - Une coupure $-\infty < s \leq (m - \mu)^2$ induite par la coupure unitaire $(m + \mu)^2 \leq u \leq \infty$.
- 5) - Une coupure circulaire $|s| = m^2 - \mu^2$ et une coupure $-\infty < s \leq 0$ induite par la coupure $t \geq 4\mu^2$ dans la voie t .
- 6) - La coupure cinématique $-\infty < s \leq 0$ due au facteur $W = s^{\frac{1}{2}}$.

Nous appellerons coupures de gauche toutes les coupures induites par les singularités des voies croisées et la coupure cinématique $-\infty < s \leq 0$.

VII - Prolongement analytique des ondes partielles dans le plan du moment angulaire. Contributions de pôles de fermions

Des relations (I.9) et (I.12) on tire :

$$f_{(J \pm \frac{1}{2})^\pm} = \frac{E+m}{16\pi W} \left[A_{J \pm \frac{1}{2}} + (W-m) B_{J \pm \frac{1}{2}} \right], \frac{E-m}{16\pi W} \left[A_{J \pm \frac{1}{2}} + (W+m) B_{J \pm \frac{1}{2}} \right] \quad (1.17)$$

où par exemple :

$$A_J = \int_{-1}^{+1} dz A(s, u, t) P_J(z) \quad (1.18)$$

Jusqu'ici J ne prenait que les valeurs physiques $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$. Le prolongement analytique à J complexe se fait à l'aide de la formule de Froissart-Gribov⁽²⁶⁾ qu'on obtient de la manière suivante.

Les amplitudes invariantes A et B satisfont à des relations de dispersion à énergie fixée de la forme ^(25,27) :

$$A(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\nu^2}^{\infty} \frac{A_1(s, t') dt'}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{A_2(s, u') du'}{u' - u} \quad (I.19)$$

En substituant (I.19) dans (I.18) et en tenant compte de (I.1) et de :

$$Q_\ell(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_\ell(z')}{z \cdot z'} dz' \quad (I.20)$$

on obtient :

$$A_{J-1/2} = \frac{1}{\pi q^2} \int_{4\nu^2}^{\infty} dt' A_1(s, t) Q_{J-1/2} \left(1 + \frac{t'}{2q^2}\right) - \frac{1}{\pi q^2} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} du' A_2(s, u') Q_{J-1/2} \left(1 - \frac{u' \cdot 2m^2 \cdot 2\mu^2 - s}{2q^2}\right)$$

Posons :

$$1 - \frac{u' \cdot 2m^2 \cdot 2\mu^2 - s}{2q^2} = -1 - \frac{x}{2q^2}$$

ce qui donne

$$x' = u' + \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s}$$

d'où en utilisant

$$Q_\ell(z) = -(-1)^\ell Q_\ell(-z)$$

$$A_{J-1/2} = \frac{1}{\pi q^2} \int_{\nu_0}^{\infty} dx \left[A_1(s, x) + (-1)^{J-1/2} A_2\left(s, x + \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s}\right) \right] Q_{J-1/2} \left(1 + \frac{x}{2q^2}\right) \quad (I.21)$$

où ν_0 est le plus petit des deux nombres $4\nu^2$ et x

$$x_0 = (m + \mu)^2 - \frac{m^2 - \mu^2}{s}$$

La relation (I.21) est une formule de Froissart-Gribov. En vertu des propriétés des fonctions de Legendre $Q_\ell(z)$ pour ℓ complexe, (I.21) permet le prolongement analytique pour J complexe ⁽²⁸⁾. Mais pour satisfaire aux conditions d'unicité du théorème de Carlson ⁽⁵⁾, qui sont violées par le pro-

longement de $(-1)^{J-\frac{1}{2}}$ en $e^{-i\pi x}$ on est obligé de prolonger séparément pour $(J - \frac{1}{2})$ pair et pour $(J - \frac{1}{2})$ impair. Les relations à prolonger sont :

$$A_{J-\frac{1}{2}}^e = \frac{1}{\pi q^2} \int_{v_0}^{\infty} dx \left[A_1(s, x) + A_2\left(s, x + \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s}\right) \right] Q_{J-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{2q^2}\right)$$

pour $J - \frac{1}{2}$ pair et :

$$A_{J-\frac{1}{2}}^{\phi} = \frac{1}{\pi q^2} \int_{v_0}^{\infty} dx \left[A_1(s, x) - A_2\left(s, x + \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s}\right) \right] Q_{J-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{2q^2}\right)$$

pour $J - \frac{1}{2}$ impair. On est amené ainsi à considérer les ondes partielles

(24)

$$f_{(J-\frac{1}{2})+}^e, f_{(J-\frac{1}{2})+}^{\phi}, f_{(J+\frac{1}{2})-}^e, f_{(J+\frac{1}{2})-}^{\phi}$$

Comme on le voit sur (I.21), la nécessité de considérer le prolongement analytique en J séparément pour les amplitudes partielles paires et impaires leur attribuant ainsi une signature ainsi qu'aux pôles correspondants α_+ et α_- , provient de l'existence de la fonction A_2 qui donne la discontinuité de $A(s, t, u)$ à travers la coupure $(m + \mu)^2 \leq u \leq \infty$ et qui joue, de ce point de vue, le même rôle que le potentiel d'échange⁽¹⁾. La dégénérescence d'échange implique que $A_2 = 0$. Dans ce cas les trajectoires de signature paire α_+ et les trajectoires de signature impaire α_- sont confondues. Muni des prolongements analytiques des ondes partielles on peut exprimer les développements (I.13) de f_1 et f_2 à l'aide d'une transformation de Sommerfeld-Watson⁽²⁴⁾ :

$$\begin{aligned} f_{1,2} = \pm \frac{i}{4} \int_C \frac{dJ}{\cos \pi J} & \left[f_{(J-\frac{1}{2})+}^e(w) \left\{ P'_{J\pm\frac{1}{2}}(-z) \pm P'_{J\pm\frac{1}{2}}(z) \right\} \right. \\ & + f_{(J-\frac{1}{2})+}^{\phi}(w) \left\{ P'_{J\pm\frac{1}{2}}(-z) \mp P'_{J\pm\frac{1}{2}}(z) \right\} \\ & - f_{(J+\frac{1}{2})-}^e(w) \left\{ P'_{J\mp\frac{1}{2}}(-z) \mp P'_{J\mp\frac{1}{2}}(z) \right\} \\ & \left. - f_{(J+\frac{1}{2})-}^{\phi}(w) \left\{ P'_{J\mp\frac{1}{2}}(-z) \pm P'_{J\mp\frac{1}{2}}(z) \right\} \right] \end{aligned} \quad (I.22)$$

où les signes du haut se rapportent à f_1 et les signes du bas à f_2 et où C

est un contour qui entoure l'axe réel positif du plan complexe J . Ce contour peut évidemment être déformé de manière à englober toute région du plan J pour laquelle les prolongements analytiques des ondes partielles existent. Mais ce faisant, on doit tenir compte des singularités qui se trouvent à l'intérieur du contour ainsi déformé, en particulier des pôles.

On peut montrer⁽²⁴⁾, en appliquant la transformation de Sommerfeld-Watson (I.22) dans la voie u que la contribution d'un pôle de signature $\zeta = (-)^{J-\frac{1}{2}}$ et de parité $P = (-)^{\ell+1}$ à l'amplitude $f_1(\sqrt{u}, s)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f_1(\sqrt{u}, s) \simeq & \frac{E_u + m}{\sqrt{u}} \frac{\beta(\pm\sqrt{u})}{\cos \pi \alpha(\pm\sqrt{u})} \left(\frac{q^2}{s_0} \right)^{\alpha(\pm\sqrt{u}) - \frac{1}{2}} \\ & \times \left[P_{\alpha(\pm\sqrt{u}) + \frac{1}{2}}(-z) + \zeta P_{\alpha(\pm\sqrt{u}) + \frac{1}{2}}(z) \right] \\ & - \frac{E_u - m}{\sqrt{u}} \frac{\beta(\mp\sqrt{u})}{\cos \pi \alpha(\mp\sqrt{u})} \left(\frac{q^2}{s_0} \right)^{\alpha(\mp\sqrt{u}) - \frac{1}{2}} \\ & \times \left[P_{\alpha(\mp\sqrt{u}) - \frac{1}{2}}(-z) - \zeta P_{\alpha(\mp\sqrt{u}) - \frac{1}{2}}(z) \right] \end{aligned} \quad (I.23)$$

les signes du haut dans les arguments de α et β correspondent à $\zeta P = -1$ et les signes du bas à $\zeta P = +1$.

Cette expression a été utilisée sous la forme simplifiée⁽¹¹⁾

$$f_1(\sqrt{u}, s) \simeq \frac{E_u + M}{\sqrt{u}} (\alpha + \frac{1}{2})(\alpha + \frac{3}{2}) \gamma \frac{1 + i \zeta e^{i\pi\alpha}}{\cos \pi \alpha} \left(\frac{s - m^2 \nu^2}{s_0} \right)^{\alpha - \frac{1}{2}} \quad (I.24)$$

C'est sous cette forme que nous l'utiliserons au chapitre III.

CHAPITRE II

Nos calculs se situent dans le contexte des notions de dualité : Ces notions émergent d'une interprétation des règles de somme à énergie finie, lesquelles découlent d'une combinaison des propriétés d'analyticité de l'amplitude et de son comportement à la Regge. Dans ce chapitre nous établissons les règles de somme à énergie finie et nous essayons de préciser leurs implications quant à la dynamique des interactions fortes.

I - Règles de Somme à énergie finie

I.1 - Règle de superconvergence

On peut montrer (22,27) que les amplitudes $A^{\pm}$ et $B^{\pm}$ satisfont à des relations de dispersion à t fixé du type

$$F^{\pm}(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \text{Im } F^{\pm}(\nu') \left[\frac{1}{\nu' - \nu - i\epsilon} \pm \frac{1}{\nu' + \nu} \right] d\nu', \quad (\text{II.1})$$

$$\text{où } \nu = \frac{s-u}{2m} \quad \text{et} \quad \nu_0 = \frac{4m^2 + t}{2m}.$$

Dans (II.1) on a tenu compte des propriétés de symétrie dans le changement $s \leftrightarrow u$, c'est à dire dans le changement $\nu \leftrightarrow -\nu$. Ces relations sont écrites sans soustraction. En outre si la fonction $F^{\pm}$ possède des pôles (termes de Born), c'est le cas pour $B^{\pm}$, ils peuvent être inclus dans l'intégrale de (II.1) à condition de sous entendre que $\text{Im } F^{\pm}$ contient des fonctions δ et d'étendre l'intervalle d'intégration de 0 à ∞ .

Supposons que F se comporte à ∞ comme ν^{-1} . Alors

$$F^{\pm}(\nu) = \frac{-2}{\pi} \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} \text{Im } F^{\pm}(\nu') d\nu' + O(\nu^{-2})$$

Par conséquent dire que $F(\nu)$ décroît plus vite que ν^{-1} à l'infini c'est dire que

$$\int_0^{\infty} \text{Im } F^-(\nu') d\nu' = 0 \quad (\text{II.2})$$

On dit alors que l'amplitude de F^- satisfait à une relation de superconvergence (29).

I.2 - Règle de somme à énergie finie

Supposons que l'amplitude F^- soit donnée à haute énergie par une somme de termes de Regge de la forme

$$R_i = \beta_i(t) \frac{1 - e^{-i\pi\alpha_i}}{\sin \pi\alpha_i \Gamma(\alpha_i+1)} \nu^{\alpha_i} \quad (\text{II.3})$$

dont le terme dominant possède un $\alpha < -1$. Alors cette amplitude satisfait à la règle de superconvergence (II.2). Si le terme dominant $R(\nu)$, mais pas celui qui le précède possède un $\alpha > -1$, on peut le soustraire de F et, toujours pour la même raison, l'amplitude résultante satisfait à une règle de superconvergence.

$$\int_0^{\infty} \text{Im } (F^- - R) d\nu = 0 \quad (\text{II.4})$$

Remarquons que

$$\text{Im } R(\nu) = \beta(t) \nu^{\alpha(t)} \quad \nu > 0$$

et que

$$R(\nu) = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta(t) \nu'^{\alpha} d\nu'}{\Gamma(\alpha+1) \nu'^2 - \nu^2 - i\epsilon} \quad -1 < \alpha < 1$$

relation qui est du même type que

$$F^-(v) = \frac{2v}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} F^-(v') dv'}{v'^2 - v^2 - i\epsilon}$$

D'une manière générale les pôles donnant les contributions (II.3) peuvent être séparés ⁽¹⁹⁾ en trois classes selon la valeur de α par rapport à -1.

La première classe contient les pôles $\alpha_i > -1$, la deuxième les pôles $\alpha_j < -1$ et la troisième les pôles α_k qui peuvent éventuellement se trouver à -1. Dans la suite, nous ignorons, pour simplifier, les pôles situés à -1. Leur traitement ne pose d'ailleurs aucune difficulté particulière ⁽¹⁹⁾.

L'amplitude dont on a retranché les contributions des pôles α_i satisfait à une relation de superconvergence

$$\int_0^\infty \left[\text{Im} F - \sum_{\alpha_i > -1} \frac{\beta_i}{\Gamma(\alpha_i + 1)} v^{\alpha_i} \right] dv = 0 \quad (\text{II.5})$$

Chaque terme dans le membre de gauche diverge, si on le considère séparément. En partageant l'intervalle d'intégration en $[0, N]$ et $[N, \infty]$ et en supposant que la différence $F - R$ est donnée sur $[N, \infty]$ par la somme des contributions des $\alpha_j < -1$, la règle de superconvergence (II.5) devient

$$\int_0^N \left[\text{Im} F - \sum_{\alpha_i > -1} \frac{\beta_i}{\Gamma(\alpha_i + 1)} v^{\alpha_i} \right] dv + \int_N^\infty \sum_{\alpha_j < -1} \frac{\beta_j}{\Gamma(\alpha_j + 1)} v^{\alpha_j} dv = 0 \quad (\text{II.6})$$

Dans (II.6) toutes les intégrales sont maintenant convergentes et on obtient immédiatement

$$S_c(N) \equiv \frac{1}{N} \int_0^N \text{Im} F^- dv = \sum_{\alpha_i > -1} \frac{\beta_i N^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} + \sum_{\alpha_j < -1} \frac{\beta_j N^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j + 2)}$$

ou en regroupant tous les pôles

$$S_c(N) \equiv \frac{1}{N} \int_0^N \text{Im} F^-(v) dv = \sum_d \frac{\beta N^d}{\Gamma(d+2)} \quad (\text{II.7})$$

Les relations du type (II.7) s'appellent règles de somme à énergie finie (l'intervalle d'intégration est fini !). Pour une discussion détaillée de ces règles de somme nous renvoyons à l'article original de Dolen - Horn - Schmid ⁽¹⁹⁾. Notons simplement ici le fait que l'importance relative des termes successifs dans (II.7) est la même que celle des termes de Regge qui apparaissent dans l'approximation de l'amplitude à haute énergie. Autrement dit, si un pôle (ou une coupure) est considéré comme négligeable au dessus de N alors cette singularité est également négligeable dans la règle de somme (II.7).

On peut facilement généraliser ces règles de somme pour les moments d'ordre supérieur. On multiplie la fonction F par une puissance entière ν , soit ν^n en conservant les mêmes propriétés analytiques, mais en changeant ou non les propriétés de symétrie ($s \leftrightarrow u$) selon que n est impair ou pair. La même méthode que celle décrite plus haut pour le moment d'ordre 0 conduit à des règles de somme du type

$$S_n(N) = \frac{1}{N^{n+1}} \int_0^N \nu^n \text{Im} F(\nu) d\nu = \sum_{\alpha} \frac{N^{\alpha}}{(d+n+1) \Gamma(\alpha+1)} \quad (II.8)$$

Ces règles de somme peuvent également être généralisées à des moments continus ⁽³⁰⁾.

Il est évident que les règles de somme à moments élevés renforcent dans l'intégrale de gauche la contribution à haute énergie (au voisinage de N). En général cette contribution est moins bien connue que la contribution à basse énergie. C'est pourquoi il n'est en principe pas intéressant d'utiliser les règles du type (II.8) pour des moments trop élevés.

II - Applications des Règles de Somme à énergie finie

Ces règles de somme à énergie finie peuvent être utilisées de diverses manières et leur interprétation comporte d'importantes implications pour la dynamique des interactions fortes.

Premier type d'application : En admettant que l'intégrale dans (II.8) peut être saturée pour une certaine valeur de N par un certain nombre de résonances et en supposant connus les paramètres de Regge du membre de droite, les règles de somme permettent en principe de connaître les constantes de couplage de ces résonances.

Deuxième type d'application : Inversement, en supposant connus le membre de gauche, à partir de résultats de basse énergie (de déphasages par exemple) on peut déterminer les paramètres de Regge qui figurent dans le membre de droite. Ces paramètres peuvent être par ailleurs déterminés par des ajustements (fit) aux résultats expérimentaux à haute énergie. Les règles de somme apparaissent ainsi comme des équations de contraintes sur les paramètres de Regge possibles utilisés dans les ajustements à hautes énergies.

Troisième type d'application : D'un point de vue théorique l'application sans doute la plus importante est l'utilisation de données de basse énergie seules pour déterminer les trajectoires pour $t > 0$ jusqu'à la lère matérialisation. En supposant par exemple que l'amplitude est bien représentée pour $\sqrt{s} > N$ par la contribution d'un seul pôle de Regge, la relation (II.8) permet d'écrire

$$\frac{S_n(N)}{S_m(N)} = \frac{\alpha(t) + m + 1}{\alpha(t) + n + 1} \quad (II.9)$$

ce qui permet de déterminer $\alpha(t)$ pour $t > 0$. Mais ce faisant on se heurte à la divergence de la série de Legendre utilisée dans le prolongement à t positif de l'amplitude. En ignorant cette difficulté ⁽¹⁹⁾, ce qui théoriquement est difficile à justifier, on peut, en principe, à partir de (II.9) calculer la trajectoire jusqu'à son premier point de bonne signature. Une fois $\alpha(t)$ déterminé, on peut en le reportant dans une autre règle de somme déterminer $\beta(t)$. On a donc là une nouvelle technique de bootstrap ⁽¹⁹⁾, qui peut en particulier être extrêmement puissante dans l'étude d'un système self-conjugué (comme le système $\pi-\pi$) ³¹.

On trouvera dans le rapport de J.D.Jackson à la Conférence de Lund⁽¹³⁾, l'analyse des principaux résultats obtenus à l'aide des règles de somme à énergie finie. Cependant, pour éclairer la notion de dualité globale que nous allons introduire, nous rappelons quelques résultats des tous premiers travaux originaux sur les règles de somme:

1°) Tout d'abord la remarquable figure (II.1) obtenue par Dolen et al⁽¹⁹⁾ et Igi et Matsuda⁽³²⁾ montre comment la contribution du ρ satisfait à la règle de somme du type (II.7) pour l'amplitude

$$F^- = A^{-1} + \nu B^-$$

Dans ce cas, $\text{Im} F^-$ dans (II.7) s'exprime à $t = 0$ en fonction de la différence des sections efficaces totales $\sigma_{\pi^- p}$ et $\sigma_{\pi^+ p}$ et le second membre de (II.7) est donné par la contribution du ρ .

2°) Le calcul de la trajectoire du ρ à partir des R.S.E.F. donne⁽¹⁹⁾

$$\begin{aligned} \alpha(\omega_\rho^2) &= 1 \pm 0.3 \\ \alpha(0) &= 0.4 \pm 0.2 \\ \alpha(-0.2) &= 0.3 \pm 0.3 \end{aligned}$$

résultats compatibles avec les ajustements à hautes énergies

$$\begin{aligned} 0.7 &> \alpha(0) > 0.56 \\ 0.4 &> \alpha(-0.2) > 0.34 \end{aligned}$$

3°) Les règles de somme pour $\nu B^- (\nu, t)$ ont mis en évidence un zéro simple du résidu du ρ , β_ρ^B à $t \approx -0.5 (\text{GeV}/c)^2$ ce qui correspond bien au "dip" observé⁽¹²⁾ dans la réaction d'échange de charge $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ à haute énergie.

4°) Pour $A^{\pi^-}(\nu, t)$ on trouve de même un zéro dans le résidu $\beta_{\rho}^{\pi^+}(t)$ à $t \simeq -0.2 \text{ (Gev/c)}^2$, résultat en accord avec la valeur qui permet d'expliquer le phénomène du "cross over", c'est-à-dire le changement de signe de

$$\Delta = \frac{d\sigma}{dt}(\pi^- p) - \frac{d\sigma}{dt}(\pi^+ p),$$

en l'attribuant à un zéro de $\beta_{\rho}^{\pi^+}(t)$ à $t \simeq -0.2$

5°) Enfin la figure (II.2) donnée par Dolen et al (19) montre les premiers zéros associés à chaque résonance pour les amplitudes A^{π^-} et B^{π^-} . Il est tout à fait remarquable que ces zéros apparaissent tous presque à la même valeur de $t \simeq (-0.6 \text{ Gev/c})$ pour B et $t \simeq -0.2 \text{ Gev/c}$ pour A^{π^-} , valeurs nous l'avons déjà dit, qui annulent les résidus $\beta_{\rho}^{\pi^+}(t)$ et $\beta_{\rho}^{\pi^+}(t)$ du ρ (dip et cross over) dans l'analyse à haute énergie de la réaction d'échange de charge πN .

De ces faits (et d'autres) il ressort que les résonances N^* à basse et moyenne énergie reproduisent, et parfois jusqu'aux détails, certaines des propriétés de la trajectoire du ρ . Inversement on peut aussi dire que la trajectoire du ρ rend compte, même à basse et moyenne énergie, de quelques unes, au moins, des propriétés de l'amplitude

III - Notion de dualité globale

Les règles de somme établissent une certaine connexion entre la région des basses énergies et la région des hautes énergies. D'après les résultats que nous venons de rappeler il apparaît que l'amplitude à basse et moyenne énergie est donnée en moyenne (sous forme intégrale) par la contribution du ρ ; en particulier les contributions des résonances de la voie directe sont donc déjà contenues, en moyenne, dans la contribution du ρ . C'est là un fait apparemment nouveau, puisque sans les règles de somme à énergie finie on ne pouvait guère envisager le problème de la validité à basse et moyenne énergie, d'une amplitude de Regge conçue en principe pour décrire les phénomènes

à haute énergie. Si en plus on suppose que l'amplitude à basse et moyenne énergie est dominée par les résonances, les règles de somme impliquent que les résonances sont, en moyenne, équivalentes aux pôles de Regge échangés dans les voies croisées : C'est la dualité globale ⁽³⁵⁾. Dans le cas de l'échange de charge, par exemple, les résonances N^* produisent, en moyenne, le même effet que le pôle du ρ échangé dans la voie croisée.

Depuis longtemps déjà on savait qu'il existait un lien entre les pôles des voies directes et les pôles des voies croisées. La dualité globale exprime ce lien, à l'aide des règles de somme à énergie finie, par une relation que nous écrivons symboliquement ⁽³³⁾ dans le cas de l'échange de charge πN

$$\langle N^* \rangle \longleftrightarrow \rho \quad (II.10)$$

On peut encore traduire (II.10) en disant que les résonances N^* à basse et moyenne énergie tendent à fabriquer le ρ dans la voie croisée, bien que cette façon de s'exprimer comporte des ambiguïtés ⁽³³⁾.

IV - Quelques conséquences immédiates de la dualité globale

1°) Dualité et modèle d'interférence

Une conséquence immédiate de la relation globalement duale (II.10) est que les modèles du type modèle d'interférence ⁽¹¹⁾ ne peuvent plus être utilisés sans précaution ⁽¹³⁾. En effet, ces modèles ajoutent aux contributions des résonances dans la voie directe les contributions des pôles de Regge dans les voies croisées, ce qui revient à compter deux fois certains effets ^(19, 33, 34). Ceci montre l'intérêt qu'il y a à construire des amplitudes dans lesquelles pôles de Regge dans les voies croisées et résonances dans la voie directe s'impliquent mutuellement.

2°) Pomeranchuk et dualité globale :

Si on considère par exemple les diffusions $K^+p \rightarrow K^+p$ et $p p \rightarrow p p$ pour lesquelles il n'existe pas de résonances et dont les sections efficaces sont constantes même à énergie relativement basse, ce qui peut s'expliquer par l'échange du Pomeranchuk, la dualité globale implique que le Pomeranchuk doit être considéré à part des autres pôles de Regge : en effet, une relation du type (II.10) ne peut exister pour le Pomeranchuk, puisque pour les réactions citées il n'y a pas de résonance dans la voie directe. Ceci conduit à associer, du point de vue de la dualité, le Pomeranchuk non pas aux résonances mais au bruit de fond (background)⁽¹³⁾. Cette conception qui distingue le Pomeranchuk apparaît comme très satisfaisante si l'on se rappelle la petitesse de sa pente (voisine de zéro) comparée à la pente (voisine de 1) des autres trajectoires.

3°) Dégénérescence d'échange et dualité :

La dualité, jointe à l'absence de résonance dans certaines voies implique la dégénérescence d'échange. On peut le comprendre aisément sur l'exemple de la diffusion $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ dont le canal $\pi^+\pi^+$ ne possède pas de résonances. Les règles de somme à énergie finie donnent zéro au premier membre tandis que le deuxième membre contient la contribution du P' et du ρ (nous excluons le P d'après le 2°). Ces deux contributions doivent se neutraliser dans les règles de somme pour tous les moments. Ce n'est possible que si le P' et le ρ sont dégénérés d'échange. Remarquons bien que cette dégénérescence implique la coïncidence de deux trajectoires de signature opposées, mais aussi une relation entre les résidus correspondants.

V - Dualité locale

La dualité globale⁽³⁵⁾ apparaît comme une notion féconde⁽¹³⁾ et semble admise à l'heure actuelle par la plupart des physiciens des hautes

énergies ⁽³⁶⁾. Mais pour certains auteurs cette notion possède, au moins approximativement, un caractère local, c'est-à-dire qu'elle est non seulement valable sur un intervalle $[0, N]$ mais aussi localement, à chaque énergie intermédiaire. En proposant cette idée ⁽²⁰⁾ C. Schmid a provoqué un débat qui n'est pas encore clos. Avant d'aborder la discussion de cette idée, revenons d'abord sur sa genèse en suivant la démarche originale de C. Schmid.

C. Schmid considère l'amplitude de spin-flip B_{ex} dans l'échange de charge πN avec sa paramétrisation habituelle ⁽³⁷⁾

$$B_{ex} = \beta(t) \frac{1 - e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha) \sin \pi\alpha} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\alpha-1} \quad (II.11)$$

où E est l'énergie du π dans le laboratoire et $\alpha(t)$ la trajectoire du ρ . Les ajustements à haute énergie ⁽²⁰⁾ donnent avec $E_0 = 0.7$ Bev

$$\alpha(t) = 0.57 + 1.08 t$$

$$\beta(t) = 60.3 \text{ m b}$$

En procédant à une analyse en ondes partielles selon la relation

$$B_l(E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) B(E, z) dz$$

et en reportant les résultats sur le diagramme d'Argand, C. Schmid constate que les B_l engendrent sur ce diagramme des boucles dans le sens direct Fig (II.3) et qui rappellent étonnamment les boucles associées à des résonances décrites par des formules de Breit-Wigner. La masse des "résonances" déduites du diagramme d'Argand ⁽²⁰⁾ correspondent sur le diagramme de Chew-Frauchi, à la trajectoire des N^* connus, Fig (II.4). Pour cette raison et pour d'autres ⁽²⁰⁾ C. Schmid conclut que les boucles d'Argand obtenues dans son analyse correspondent effectivement à des résonances. A partir de la trajectoire du ρ , dans la voie t , on obtient, à moyenne énergie, une à une les résonances du N^* dans la voie s . La correspondance entre pôles de Regge

dans la voie croisée et résonances dans la voie directe est non seulement globale, mais aussi locale.

Une analyse similaire à celle de C. Schmid a été faite par Collins et al.⁽²¹⁾ pour le système π -N d'une manière plus quantitative et à des énergies plus basses. Ils retrouvent des boucles sur le diagramme d'Argand pour la plupart des ondes partielles et certains de leurs déphasages sont en accord avec les déphasages obtenus dans diverses analyses. Mais ils émettent des objections contre l'interprétation de ces boucles comme résonances. J. Letessier, H. Hogaesen et moi-même avons fait en même temps que Collins et al. et indépendamment d'eux, la même analyse utilisant essentiellement les mêmes amplitudes. Nous avons trouvé quelques accords qualitatifs avec leurs résultats, mais beaucoup de désaccords flagrants. De notre correspondance avec Collins il est ressorti que ces désaccords peuvent provenir des traitements différents des "ghosts - killing factors" et de ce que, en fait, Collins et al ont modifié les amplitudes données par Philipps et al.⁽³⁸⁾, tout en conservant les paramètres, obtenus par ajustements, donnés par ces auteurs. Finalement, de ces études et des études faites par d'autres auteurs⁽³⁹⁾, il ressort que l'analyse en ondes partielles d'une amplitude de Regge produit sur le diagramme d'Argand des boucles dont la structure est assez sensible à la paramétrisation de l'amplitude. Mais l'identification de ces boucles aux résonances connues est loin de s'imposer du point de vue purement numérique.

Nous allons essayer de comprendre, indépendamment des calculs numériques, l'origine des boucles d'Argand, que nous appellerons désormais boucles de Schmid, pour rappeler leur provenance d'amplitudes de Regge. Il est clair que si les boucles de Schmid ne correspondaient pas à des résonances, la méthode classique de détermination des résonances par le diagramme d'Argand^(40,41) deviendrait sujette à caution.

VI - Boucles de Schmid et facteur de signature

Chiu et Kotanski⁽⁴²⁾ ont montré que l'existence des boucles de Schmid est due essentiellement au facteur de signature. Le développement de ce facteur donne

$$1 \pm e^{-i\pi\alpha} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) [\delta_l + a_l]$$

avec

$$a_l = \pm e^{-i\pi\alpha} (-i)^l e^{2q^2 l \pi \alpha'} j_l(-2q^2 \pi \alpha') \quad (II.12)$$

où $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha' t$

et où j_l est la fonction de Bessel sphérique.

Dans (II.12) c'est le terme $e^{2q^2 l \pi \alpha'}$ qui est responsable du mouvement circulaire dans le sens direct sur le diagramme d'Argand. Quant à la fonction de Bessel elle donne le rayon instantané du cercle. La phase d'une onde partielle l peut atteindre $\pi/2$ pour une certaine valeur de q_l^2 . La phase de l'onde partielle $l' = l + \Delta l$ passera par $\pi/2$, d'après (II.12), pour une valeur de q^2 , $q_{l'}^2$, telle que

$$q_{l'}^2 = q_l^2 + \frac{\Delta l}{4\alpha'}$$

ce qui donne asymptotiquement

$$s_{l'} = s_l + \frac{\Delta l}{\alpha'}$$

Ainsi, si les passages par $\frac{\pi}{2}$ sont associés à des résonances, les résonances de la voie directe se trouvent sur une trajectoire linéaire de même pente que les trajectoires échangées dans la voie t. Expérimentalement, mis à part le Pomeranchuk, il semble bien que toutes les trajectoires, aussi bien celles des mesons que celles des baryons ont même pente. Pour une onde partielle

donnée, la plus petite valeur de l'énergie correspondant au passage par $\frac{\pi}{2}$ est donnée par

$$s = \frac{\ell + 2\alpha_0 + 1}{\alpha'} \quad (11.11)$$

Mais la relation (11.12) implique que si une onde partielle ℓ_1 résonne à une énergie s_1 donnée par (11.13), toutes les ondes partielles $\ell' = \ell_1 + 2n$ résonneront à la même énergie. Ainsi, si l'on considère le passage par un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ comme indiquant la présence d'une résonance, à chaque onde résonnante ℓ_1 on est conduit à associer une famille de résonances de même masse s_1 mais de spin de plus en plus élevé. Cette famille constitue la famille des trajectoires "ancêtres" ⁽⁴³⁾ de la trajectoire ℓ_1 . On montre ⁽⁴⁴⁾ que ces "ancêtres" correspondent sur le diagramme d'Argand à des boucles très petites, c'est-à-dire que les résonances correspondantes, si elles existaient, auraient une petite inélasticité, et cela même à des énergies très basses. Nous retrouverons le problème des ancêtres quand nous comparerons nos résultats à ceux d'autres auteurs ⁽²¹⁾.

VII - Objections contre l'interprétation de Schmid. Discussions

Que le mouvement circulaire sur le diagramme d'Argand soit dû au facteur $e^{-i\pi\alpha(t)}$ semble limiter la signification dynamique des boucles de Schmid et son interprétation s'est heurtée à de nombreuses objections. Nous n'entrerons pas ici dans la controverse. Nous renvoyons à un article très instructif de Schmid ⁽⁴⁵⁾ où la plupart des objections sont réfutées par des arguments, sinon convaincants du moins tout à fait plausibles. Il semble bien qu'il n'y ait aucune raison décisive de rejeter l'interprétation de Schmid. Pourtant l'absence de pôles dans le second feuillet du plan de l'énergie, pôles définissant habituellement les résonances, continue d'apparaître comme une assez grande difficulté, et certainement la principale, dans l'interprétation de Schmid, même si l'on est enclin à l'adopter. On peut remarquer que l'amplitude de Regge n'est pas unitaire. D'autre part on sait ⁽⁴⁶⁾ que l'unitarité joue un rôle essentiel dans la structure analytique de l'amplitude de

diffusion. On peut donc espérer faire apparaître les pôles qui manquent à l'amplitude de Regge en l'unitarisant d'une manière adéquate. De façon générale, on peut penser préciser le contenu physique à basse et moyenne énergie d'une amplitude de Regge en lui imposant l'unitarité. C'est cette tentative d'unitarisation que nous décrivons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

Le problème de construire à partir d'une amplitude de Regge donnée une amplitude unitaire possédant des résonances dans la voie s a été abordé récemment par d'autres auteurs ⁽⁴⁷⁾. Ils utilisent un formalisme qui s'apparente au formalisme de la matrice K ⁽⁴⁸⁾ dans lequel l'onde partielle $f_l(s)$ s'écrit

$$f_l(s) = \frac{R_l(s)}{1 - i Z(s) R_l(s)}$$

où $R_l(s)$ est l'onde partielle correspondant à l'amplitude de Regge et où $Z(s)$ est une fonction choisie de manière que $f_l(s)$ tende vers $R_l(s)$ et possède des pôles dans le second feuillet, donné par l'équation

$$1 - i Z(s) R_l(s) = 0$$

Nous renvoyons pour les détails à la référence (47), nous contentant de noter que ce même formalisme a été utilisé ⁽⁴⁹⁾ dans l'unitarisation du modèle de Veneziano ⁽⁵⁰⁾ et que malgré sa simplicité incontestable il renferme quelques difficultés ^(47,49) dans sa mise en pratique.

Le formalisme que nous avons adopté relève de la méthode N/D ⁽⁵¹⁾. Cette méthode permet de construire une amplitude unitaire et possédant les bonnes propriétés analytiques, quelles que soient les approximations faites dans les calculs effectifs. Mais, bien entendu, le contenu dynamique des équations N/D dépend essentiellement du modèle choisi pour les singularités de gauche, et l'unitarité de la solution des équations N/D sera celle, plus ou moins approchée, qu'on aura introduite dans ces équations.

Les équations N/D posent en général le problème de la convergence des intégrales ^(4, 52) qui y interviennent et comportent la fameuse ambiguïté due aux pôles C.D.D. ^(4, 22). Nous discuterons rapidement ces deux problèmes

quand nous aurons écrit nos équations.

La méthode N/D détruit malheureusement les propriétés de croisement⁽⁵²⁾ des amplitudes. Cela représente évidemment une grave mutilation lorsqu'il s'agit d'unitariser⁽⁵¹⁾ l'amplitude de Veneziano⁽⁵⁰⁾. Dans notre problème, les amplitudes phénoménologiques qui interviennent ne possèdent ni la concision ni les caractères de l'amplitude de Veneziano. Les unitariser même par une méthode qui détruit les propriétés de croisement devrait constituer un progrès.

I - Méthode N/D modifiée

Considérons une onde partielle $B_\ell(s)$ munie dans le plan complexe de la variable s , d'une coupure gauche $[-\infty, s_g]$ et d'une coupure droite $[s_0, \infty]$ où s_0 est le seuil physique. Supposons que le comportement à l'infini permette, en utilisant le théorème de Cauchy⁽⁵⁴⁾ de la mettre sous la forme

$$B_\ell(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_g} \frac{\text{Im } B_\ell(s')}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im } B_\ell(s')}{s' - s} ds' \quad (\text{III.1})$$

où l'on a utilisé la propriété de réalité

$$B_\ell^*(s^*) = B_\ell(s)$$

pour remplacer la discontinuité sur les coupures par $\text{Im } B_\ell(s)$.

L'équation (III.1) peut encore s'écrire

$$B_\ell(s) = B_\ell^P(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\text{Im } B_\ell(s')}{s' - s} ds' \quad (\text{III.2})$$

où s_1 est, pour le moment, une valeur quelconque de l'intervalle d'intégration $[s_0, \infty]$ et où $B_\ell^P(s)$ s'obtient par comparaison de (III.1) et de (III.2).

La connaissance de $B_\ell(s)$ suppose, en principe, la connaissance exacte des discontinuités de $B_\ell(s)$ sur les coupures $[-\infty, s_g]$ et $[s_1, \infty]$. C'est dire qu'on ne peut connaître $B_\ell(s)$ qu'approximativement.

La méthode N/D⁽⁵¹⁾ consiste à mettre l'amplitude $B_\ell(s)$ sous la forme

$$B_\ell(s) = \frac{N_\ell(s)}{D_\ell(s)} \quad (\text{III.3})$$

de façon que les coupures de $N_\ell(s)$ et de $D_\ell(s)$ soient distinctes. Dans la méthode classique,^(51,52) $N_\ell(s)$ possède la coupure de gauche et $D_\ell(s)$ la coupure de droite, celle due à l'unitarité dans la voie (s) . Cette décomposition permet d'écrire

$$\text{Im } N_\ell(s) = D_\ell(s) \text{Im } B_\ell(s), \text{ pour } s \leq s_g$$

et (III.4)

$$\text{Im } D(s) = N_\ell(s) \text{Im } \frac{1}{B_\ell(s)}, \text{ pour } s \geq s_0$$

où $\text{Im } \frac{1}{B_\ell(s)}$ est déterminée par la relation d'unitarité⁽⁵²⁾.

Mais si l'on veut imposer l'unitarité sur une portion $[s_0, s_1]$ de la coupure unitaire, $D_\ell(s)$ ne devra avoir que cette portion de coupure et sera réelle en dehors de ce segment ; $N_\ell(s)$ devra par conséquent posséder toutes les autres coupures, c'est-à-dire, dans le cas qui nous occupe, la coupure $[-\infty, s_g]$ et la coupure $[s_1, \infty]$. Les relations (III.4) deviennent

$$\text{Im } N_\ell(s) = D_\ell \text{Im } B_\ell(s) \quad \text{pour } s \leq s_g \text{ et } s \geq s_1$$

(III.5)

$$\text{Im } D_\ell(s) = N_\ell(s) \text{Im } \frac{1}{B_\ell(s)} \quad \text{pour } s_0 \leq s \leq s_1$$

Nous pouvons donc écrire en normalisant $D_\ell(s)$ à 1 pour s infini

$$D_\ell(s) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\text{Im } D_\ell(s') ds'}{s' - s} \quad (\text{III.6})$$

et en tenant compte de (III.2) et de (III.3)

$$N_\ell(s) = B_\ell(s) D_\ell(s) = B_\ell^P(s) D_\ell(s) + \frac{D_\ell(s)}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\text{Im } B_\ell(s')}{s' - s} ds' \quad (\text{III.7})$$

La réalité de $N_\ell(s)$ sur le segment $[s_0, s_1]$ entraîne que

$$\frac{D_\ell(s)}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\text{Im } B_\ell(s')}{s' - s} ds' = -\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} B_\ell^P(s') \frac{\text{Im } D_\ell(s')}{s' - s} ds' \quad (\text{III.8})$$

En portant (III.8) dans (III.7) et en remplaçant $D_\ell(s)$ par son expression (III.6) on obtient

$$N_\ell(s) = B_\ell^P(s) - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} ds' \frac{B_\ell^P(s') - B_\ell^P(s)}{s' - s} \text{Im } D_\ell(s') \quad (\text{III.9})$$

L'unitarité donne ⁽⁵²⁾, en tenant compte de la réalité de $N_\ell(s)$ sur le segment $[s_0, s_1]$

$$\text{Im } D_\ell(s) = N_\ell(s) \text{Im} \frac{1}{B_\ell(s)} = -\rho_\ell(s) N_\ell(s) \quad (\text{III.10})$$

où

$$\rho_\ell(s) = \frac{q^{2\ell+1}}{8\pi \sqrt{s}} \quad (\text{III.11})$$

dans le cas de l'unitarité élastique ⁽⁵²⁾. Finalement, on peut réécrire, grâce à (III.10), les équations (III.9) et (III.6) sous la forme

$$N_{\ell}(s) = B_{\ell}^P(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} ds' \frac{B_{\ell}^P(s') - B_{\ell}^P(s)}{s' - s} \rho_{\ell}(s') N_{\ell}(s') \quad (\text{III.12})$$

$$D_{\ell}(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} ds' \frac{N_{\ell}(s') \rho_{\ell}(s')}{s' - s} \quad (\text{III.13})$$

Dans l'équation (III.12) on peut considérer $B_{\ell}^P(s)$ comme donnée et résoudre par rapport à $N_{\ell}(s)$. Mais le choix de $B_{\ell}^P(s)$ doit satisfaire, en principe, aux propriétés analytiques qui nous ont permis d'établir les équations (III.12) et (III.13). En particulier $B_{\ell}^P(s)$ doit être réel sur l'intervalle $[s_0, s_1]$. En outre ce choix de $B_{\ell}^P(s)$ doit être raisonnable au point de vue physique. Nous expliquerons plus tard comment on peut construire un $B_{\ell}^P(s)$ caractérisé essentiellement par un comportement à la Regge.

En écrivant pour $B_{\ell}(s)$ une relation de dispersion sous la forme (III.1) nous avons supposé que les intégrales qui y figurent étaient convergentes. Ceci n'est pas en général vrai. On est obligé alors d'effectuer ce qu'on appelle des soustractions ⁽⁵²⁾. Si, par exemple, le comportement à l'infini de $B_{\ell}(s)$ est tel que $\frac{\text{Im} B_{\ell}(s)}{s}$ tend vers $\frac{\text{cte}}{s \log(s)}$, une seule soustraction suffit.

La relation (III.1), toujours par application du théorème de Cauchy à la fonction $\frac{B_{\ell}(s)}{s-a}$, prendra la forme

$$B_{\ell}(s) = B_{\ell}(a) + \frac{s-a}{\pi} \int_{-\infty}^{s_0} \frac{ds' \text{Im} B_{\ell}(s')}{(s'-a)(s'-s)} + \frac{s-a}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \text{Im} B_{\ell}(s')}{(s'-a)(s'-s)}$$

Le terme soustraction vient de ce que dans la relation précédente tout se passe, formellement, comme si on avait de la fonction $B_{\ell}(s)$ soustrait sa valeur en un point a dit point de soustraction. Ce qui introduit dans le

problème au moins une constante arbitraire (ici $B_\ell(a)$). Nous reviendrons sur ce problème des soustractions dans le cas particulier d'une onde partielle de Regge.

Une autre question importante, relative aux équations N/D, est celle de l'ambiguïté de Castillejo-Dalitz-Dyson ⁽⁵⁵⁾ : alors qu'on ne peut évidemment ajouter des coupures à la fonction $D_\ell(s)$ sans modifier les propriétés analytiques de $B_\ell(s)$ sur le feuillet physique ⁽⁵²⁾, on peut par contre lui ajouter des pôles ; autrement dit, pour une coupure de gauche donnée, la solution des équations N/D n'est pas unique. La fonction $D_\ell(s)$ donnée par (III.13) peut être remplacée par

$$D_\ell(s) = D_\ell(s) + \sum_i^{n_\ell} \frac{\gamma_i}{s - s_i} ,$$

si l'on suppose l'existence de n_ℓ pôles C.D.D. L'introduction de ces pôles C.D.D. produira des zéros dans le dénominateur de $B_\ell(s)$. Ces zéros correspondent à des pôles $B_\ell(s)$ qui peuvent apparemment être ajoutés d'une manière arbitraire ⁽⁵²⁾. Nous admettrons ^(22,52,56) que les résonances que nous cherchons sont, en principe, complètement déterminées par les coupures de gauche et ne correspondent pas à des pôles C.D.D. Pour l'étude de ces pôles, leur relation avec le nombre des soustractions dans la représentation de Mandelstam ⁽⁵⁷⁾ et leur interprétation physique possible, nous renvoyons aux références (4) et (22).

II- Recherches des résonances

Une fois l'équation (III.12), avec un $B_\ell^P(s)$ donné, résolue, on calcule $D_\ell(s)$ à l'aide de (III.13). Les pôles de $B_\ell(s)$ correspondent aux zéros de $D_\ell(s)$. Un pôle décrivant une résonance, c'est-à-dire une "particule" de masse m qui se désintègre (sa probabilité de présence décroît exponentiellement quand le temps s'écoule ⁽⁵²⁾) doit se trouver dans le second feuillet du

plan complexe de la variable s : la résonance apparaît en fait comme possédant une masse complexe $m - i\Gamma/2$, avec Γ positif et petit devant m .

Le signe $-$ dans l'expression de la masse complexe, est essentiel: il assure que la particule se désintègre quand le temps s'écoule. Dans le second feuillet du plan (s) une résonance correspond donc à un pôle au point $s = m^2 - i\Gamma m$, avec $\Gamma > 0$.

En toute rigueur la recherche des pôles correspondant aux résonances implique le prolongement analytique des ondes partielles au second feuillet. Ce passage du premier au second feuillet se fait généralement grâce à la relation d'unitarité sur les ondes partielles ⁽²³⁾. Une fois le prolongement effectué on cherche les pôles directement dans le plan complexe.

On peut faciliter cette recherche de pôles en opérant avec moins de rigueur. En effet, au voisinage d'un pôle dans le second feuillet, une onde partielle peut-être représentée par une formule de Breit-Wigner

$$B_l(s) = \frac{A}{s - m^2 + i\Gamma m} \quad (III.14)$$

Mais $B_l(s)$ est proportionnelle à $e^{i\delta_l} \sin \delta_l$, où $\delta_l(s)$ est ⁽⁵²⁾ le déphasage. Pour s voisin de m^2 on aura donc

$$e^{i\delta} \sin \delta = \frac{-\Gamma m}{s - m^2 + i\Gamma m} \quad (III.15)$$

$A = -\Gamma m$ ayant été déterminé par le fait qu'au voisinage de $s = m^2$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{s - m^2 + i\Gamma m}{A} \right) = -1$$

Le second membre de (III.15) est imaginaire pur, ce qui implique que δ soit égal à $\frac{\pi}{2}$, pour $s = m^2$. On peut d'ailleurs montrer, à partir de (III.15) que ce passage de δ par $\frac{\pi}{2}$, pour $s = m^2$, se fait avec une dérivée $\frac{d\delta}{ds}$ positive. Ainsi l'existence d'un pôle dans le second feuillet permet d'approcher l'amplitude par une formule de Breit - Wigner, telle que le déphasage passe par $\frac{\pi}{2}$ avec une dérivée positive : d'où les boucles décrites par les ondes partielles sur le diagramme d'Argand (40).

Le passage de $\delta_l(s)$ par $\frac{\pi}{2}$ impose que (52)

$$\operatorname{Re} D(m^2) = 1 - \frac{P}{i\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{N_l(s') \rho_l(s')}{s - m^2} ds' = 0, \quad (\text{III.16})$$

équation qui détermine la masse m de la résonance.

Au voisinage de $s = m^2$ on écrit

$$\operatorname{Re} D_l(s) = (s - m^2) \left[\operatorname{Re} D_l(s) \right]'_{s=m^2},$$

ce qui permet de calculer la largeur Γ de la résonance cherchée, en identifiant $D_l(s)$ au dénominateur de la formule de Breit-Wigner (III.14).

On obtient

$$\Gamma = \frac{1}{m} \frac{\operatorname{Im} D_l(m^2)}{\left[\operatorname{Re} D_l(s) \right]'_{s=m^2}} \quad (\text{III.17})$$

III - Construction de $B_l^P(s)$ dans le modèle de Chew et Jones

Des équations du type (III.12) et (III.13) ont été utilisées par Chew et Jones ⁽⁵⁸⁾ dans leur construction d'un modèle de "bootstrap" self-consistant des trajectoires de Regge qui interviennent dans la diffusion $\pi-\pi$. L'amplitude totale est supposée être approchée par une expression de la forme

$$\begin{aligned}
 A(s, t, u) = & \sum_i \left[R_i^{t_1}(s, t) + \tau_i R_i^{u_1}(s, u) \right] \\
 & + \sum_j \left[R_j^{s_1}(t, s) + \tau_j R_j^{u_1}(t, u) \right] \\
 & + \sum_k \left[R_k^{s_1}(u, s) + \tau_k R_k^{t_1}(u, t) \right]
 \end{aligned} \tag{III.18}$$

où chaque sommation correspond aux contributions des pôles de Regge respectivement dans les voies s , t , u . Les trois bandes du diagramme de Mandelstam ⁽⁵⁷⁾ dans lesquelles les différents termes de (III.18) sont supposés dominer l'amplitude, sont représentées sur la fig (III.1). En réalité, la représentation (III.18) de l'amplitude correspond à une certaine approximation des différentes fonctions spectrales dans la représentation Mandelstam ⁽⁵⁷⁾. Les différents termes $R_i^{t_1}(s, t)$, $R_i^{u_1}(s, u)$ etc. de (III.18) sont construits de manière à satisfaire à la représentation de Mandelstam ^(27, 57) dans des bandes bien définies (fig. III.2). Ainsi, par exemple, le terme $R_i^{t_1}(s, t)$ possède une fonction spectrale dont les asymptotes sont $s = s_0$ et $t = t_1$. De même les asymptotes correspondant à $R_j^{s_1}(t, s)$ sont $t = t_0$ et $s = s_1$ etc... Chew et Jones montrent ⁽⁵⁸⁾ que $R_j^{s_1}(t, s)$ (qui correspond à un pôle de Regge dans la voie t) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 R_j^{s_1}(t, s) = & \frac{1}{2} G(t) (-q_t^2)^{\alpha_j(t)} \left[- \frac{P_{\alpha_j(t)}(1 + s/2q_t^2)}{\sin \pi \alpha_j(t)} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-q_t^2}^{s_1} \frac{P_{\alpha_j(t)}(-1 - s'/2q_t^2)}{s' - s} ds' \right]
 \end{aligned} \tag{III.19}$$

A partir de l'amplitude $A(s, t, u)$ donnée par (III.18), Chew et Jones construisent des amplitudes $A^{\pm}(s, t)$ de signature définie. On trouve

$$A^{\pm}(s, t) = A^{s\pm}(s, t) + V^{s\pm}(s, t), \quad (\text{III.20})$$

où

$$A^{s\pm}(s, t) = \sum_i R_i^{t_1}(s, t) \pm \tau_i R_i^{u_i}(s, t)$$

et où $V^{s\pm}(s, t)$ contient uniquement les contributions des pôles dans les voies croisées.

On montre ⁽⁵⁸⁾ que les ondes partielles $B_{\ell}^V(s)$ de $V^{s\pm}(s, t)$ possède la coupure de gauche et une coupure $[s_1, \infty]$. En outre, bien qu'il ne contienne que les pôles de la voie directe $A^{s\pm}(s, t)$ contribue à la coupure de gauche pour $s < -t_1 + 4p^2$.

Chew et Jones prennent

$$B^P(\ell, s) = B^V(\ell, s) + B^A(\ell, s), \quad (\text{III.21})$$

où $B^V(\ell, s)$ est la projection de $V^{s\pm}(s, t)$ et où $B^A(\ell, s)$ correspond à la contribution de $A^{s\pm}$ à la coupure de gauche.

IV - Construction du $B_{\ell}^P(s)$ dans notre modèle

Le modèle pour $B_{\ell}^P(s)$ dont nous venons de donner les principales lignes a été conçu par Chew et Jones en vue de calculer d'une manière self consistante, fondée sur l'hypothèse du bootstrap, ^(46, 52) les trajectoires et même peut-être les résidus des pôles de Regge qui interviennent dans le processus considéré (ici diffusion $\pi\pi$). Les calculs effectués à l'aide de ce modèle ⁽⁵⁹⁾ ne semblent pas avoir donné les résultats escomptés.

Notre point de vue est moins ambitieux et rejoint un point de vue exprimé par R.L. Warnock ⁽⁶⁰⁾. Il s'agit de savoir dans quelle mesure les pôles de Regge, qui dominent l'amplitude à haute énergie, déterminent les résonances de la voie directe à basse et moyenne énergie. Notre $B_\ell^P(s)$ sera construit à partir d'amplitudes dont le comportement asymptotique est de la forme

$$A_\ell^R(s, t) = B_\ell(t) \frac{1 \pm e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} s^{\alpha(t)} \quad (\text{III.22})$$

et de termes analogues correspondant aux pôles de Regge échangés dans la voie u.

Avant d'en venir à la construction du $B_\ell^P(s)$, examinons le problème des soustractions dans les équations (III.1) pour des amplitudes possédant le comportement asymptotique (III.22) et le comportement du $B_\ell^P(s)$ au voisinage de $s = s_1$.

1°) Comportement asymptotique des ondes partielles :

L'onde partielle correspondant à (III.22) est définie par

$$A_\ell^R(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_\ell(z) A^R(s, t), \quad (\text{III.23})$$

où z désigne le cosinus de l'angle de diffusion dans la voie s :

$$z = 1 + \frac{t}{2q_s^2}$$

En choisissant t comme variable d'intégration (III.23) devient

$$A_l^R(s) = \frac{1}{4q_s^2} \int_{-4q_s^2}^0 \frac{B(t) (1+e^{-i\pi\alpha(t)})}{\sin \pi \alpha(t)} s^{\alpha(t)} \rho_l \left(1 + \frac{t}{2q_s^2}\right) dt \quad (\text{III.24})$$

On peut chercher la limite de $A_l^P(s)$ quand $s \rightarrow +\infty$ de plusieurs manières ^(60,61,62). La principale difficulté vient de ce que l'intervalle d'intégration devient infini quand $s \rightarrow +\infty$. En général ^(60,61) il faut faire des hypothèses sur le comportement des trajectoires et des résidus pour t négatif infini. Mais même avec de telles hypothèses, le problème se pose de savoir si l'approximation de l'amplitude par (III.22) pour s infini et t infini possède un sens. Rappelons en effet que des formes du type (III.22) ne sont censées représenter l'amplitude physique que pour s grand et positif et t négatif et petit. Mais il est plausible que la principale contribution à l'onde partielle dans (III.24) soit obtenue ⁽⁶⁰⁾ en limitant l'intervalle d'intégration à $-T \leq t < 0$, où T est une quantité finie. Cela revient à négliger ⁽⁶⁰⁾ la contribution de (III.24) due à l'intégration sur l'intervalle $[-4q_s^2, T]$. En procédant ainsi on peut montrer que

$$A_l^R(s) \rightarrow \frac{\beta(0)s^{\alpha(0)-1}}{\alpha'} \left(\frac{i}{\log(s)} - \frac{\pi}{2\log(s)} \right) \quad (\text{III.25})$$

Comme l'onde partielle qui intervient dans (III.1) est l'onde partielle réduite, c'est-à-dire divisée par q^{2l} il en résulte que

$$B_l(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{\beta(0)}{\alpha'(0)} s^{\alpha(0)-1-l} \left(\frac{i}{\log(s)} - \frac{\pi}{2\log(s)} \right), \quad (\text{III.26})$$

d'où

$$\operatorname{Im} B_\ell(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \frac{B(0)}{\alpha(0)} \frac{s^{\alpha(0)-1-\ell}}{\log(s)} \quad (III.27)$$

Le comportement de $B_\ell(s)$, pour s tendant vers $-\infty$, est plus difficile à déterminer. Omnès ⁽⁶¹⁾ a démontré, sous certaines conditions, qu'il est, à des logarithmes près, de la forme $s^{\alpha(0)-\ell-1}$. Dans cette même étude Omnès montre que toutes les ondes, y compris l'onde S, satisfont à des relations de dispersion sans soustraction. A vrai dire, la situation quand $s \rightarrow -\infty$ n'est peut-être pas tout à fait claire. Kinoshita ⁽⁶³⁾ a suggéré, avec des hypothèses de nature complètement différente de celles d'Omnès, qu'une seule soustraction était au plus nécessaire. Nous supposons que le comportement de $B_\ell(s)$ est effectivement de la forme $s^{\alpha(0)-\ell-1}$ pour $|s| \rightarrow \infty$. Dans le cas où la trajectoire dominante est le Poméranchuk $\alpha(0) = 1$ et seule l'onde S pourra nécessiter une soustraction.

2°) Comportement de $B_\ell^P(s)$ au voisinage de $s = s_1$:

Par construction, les équations (III.2), (III.12) et (III.13) sont (dans le cadre de nos approximations) des équations exactes : le point s_1 n'est pas ici un point de coupure pour éviter aux intégrales de diverger et, théoriquement, la solution de nos équations N/D devrait être indépendante de s_1 (si l'unitarité sur le segment $[s_0, s_1]$ était traitée d'une manière exacte). Ceci constitue, en principe, un avantage sur les méthodes N/D où l'on est obligé de borner les intervalles d'intégration pour éviter la divergence des intégrales. Malheureusement, dans la méthode N/D modifiée, s_1 correspond à un point singulier pour $B_\ell^P(s)$. En effet, le deuxième terme de (III.2) possède une singularité de point final et on peut aisément

voir que

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\text{Im } B_\ell(s')}{s-s'} ds' \xrightarrow{s \rightarrow s_1} \frac{1}{\pi} \text{Im } B_\ell(s_1) \log(s_1 - s) \quad (\text{III.28})$$

Comme l'onde partielle $B_\ell(s)$ (eq. III.2) n'a aucune raison d'être singulière en $s = s_1$, il est nécessaire que

$$B_\ell^P(s) \xrightarrow{s \rightarrow s_1} - \frac{1}{\pi} \text{Im } B_\ell(s_1) \log(s_1 - s) \quad (\text{III.29})$$

pour faire disparaître cette singularité. D'un point de vue physique on peut voir que cette singularité correspond à faire coïncider les déphasages obtenus par l'unitarité élastique, en dessous de s_1 , avec ceux donnés par la forme asymptotique pour $s > s_1$.

Au dessous de s_1 l'unitarité élastique donne

$$\sin^2 \delta_\ell(s) = \rho_\ell(s) \text{Im } B_\ell(s)$$

et en s_1 nous imposons

$$\sin^2 \delta_\ell(s_1) = \rho_\ell(s_1) \text{Im } B_\ell^P(s_1)$$

En résumé, le $B_\ell^P(s)$ doit posséder une coupure de gauche qui jouera le rôle de la coupure de gauche de $B_\ell(s)$, une coupure $[s_1, \infty]$, et une singularité logarithmique au point s_1 . Il doit en outre être réel sur le segment $[s_0, s_1]$ qui est la coupure unitaire de $D_\ell(s)$.

3°) Construction de $B_{\ell}^P(s)$

Nous partons d'une amplitude

$$\bar{A}(s, t) = \beta(t) \left(\frac{s^{\alpha(t)} \pm u^{\alpha(t)}}{\sin \pi \alpha(t)} \right) \quad (\text{III.30})$$

qui redonne asymptotiquement (III.22).

$\bar{A}$ possède dans le plan (s) une coupure de gauche provenant du terme en u et une coupure $[0, \infty]$ due au terme $s^{\alpha(t)}$. L'onde partielle $\bar{A}_{\ell}(s)$ de $\bar{A}(s, t)$ possède cette coupure $[0, \infty]$. La fonction

$$B_{\ell}^R(s) = \bar{A}_{\ell}(s) / q^{\ell\ell}$$

la possède également et ne peut jouer le rôle du $B_{\ell}^P(s)$ de l'équation (III.12) dont la coupure à droite commence à s_1 . On peut supprimer la portion de coupure $[0, s_1]$ en remplaçant dans (III.30) $s^{\alpha(t)}$ par $(s - s_1)^{\alpha(t)}$. Mais cette modification n'assure pas la condition (III.29). Nous définirons plutôt $B_{\ell}^P(s)$ par

$$B_{\ell}^P(s) = B_{\ell}^R(s) - \frac{1}{\pi} \int_{s_g}^{s_1} \frac{\text{Im } B_{\ell}^R(s') ds'}{s' - s} \quad (\text{III.31})$$

qui est réelle pour $s_0 \leq s \leq s_1$, et qui possède le comportement (III.29).

Pratiquement nous procédons comme suit:

- Nous calculons l'onde partielle réduite $B_{\ell}^R(s)$ correspondant à l'amplitude de Regge. En particulier nous calculons $\text{Im } B_{\ell}^R(s)$ pour $s_g \leq s \leq s_1$.
- Nous remplaçons $B_{\ell}^R(s)$ par $B_{\ell}^P(s)$ donnée par (III.31).
- Avec ce $B_{\ell}^P(s)$ comme donnée nous résolvons l'équation (III.12) par rapport à $N_{\ell}(s)$.

d) A partir de $N_\ell(s)$ ainsi obtenu nous calculons $\eta_\ell(s)$ par (III.13) et nous cherchons la position et la largeur des résonances à l'aide de (III.16) et de (III.17).

Avant de passer à l'application du modèle que nous venons de décrire, aux amplitudes de Regge de la diffusion π -N, examinons les particularités et les méthodes de résolutions possibles de l'équation intégrale (III.12)

V - Résolution de l'équation intégrale sur $N_\ell(s)$

A cause de la singularité logarithmique de $B_\ell^P(s)$ en s_1 , le noyau

$$K_\ell(s, s') = \frac{B_\ell^P(s') - B_\ell^P(s)}{s' - s} \quad (\text{III.32})$$

de l'équation (III.12) se comporte, quand s et s' tendent vers s_1 , comme

$$k_0(s, s') = \frac{\log(s_1 - s') - \log(s_1 - s)}{s' - s} \quad (\text{III.33})$$

Il en résulte que l'équation (III.13) n'est pas de Fredholm. Chew a cependant montré ⁽⁶⁴⁾ en utilisant la technique de Wiener - Hopf ⁽⁶⁵⁾ que cette équation admettait une solution unique. L'idée de Chew est de réécrire l'équation (III.12) en séparant la partie singulière du noyau :

$$N_\ell(s) = B_\ell^P(s) + \int_{s_0}^{s_1} ds' \bar{K}_\ell(s, s') N_\ell(s') - \frac{\lambda_\ell}{\pi^2} \int_{s_0}^{s_1} ds' k_0(s, s') N_\ell(s') \quad (\text{III.34})$$

où

$$\lambda_\ell = \rho_\ell(s_1) \operatorname{Im} B_\ell^P(s_1)$$

et où $\bar{K}_l(s, s')$ s'obtient par comparaison de (III.34) et (III.12). On trouve que

$$\bar{K}_l(s, s') \underset{\substack{s \rightarrow s_1 \\ s' \rightarrow s_1}}{\sim} \frac{(s_1 - s') \log(s_1 - s') - (s_1 - s) \log(s_1 - s)}{s' - s} \quad (\text{III.35})$$

On peut alors remplacer l'équation (III.12) par un système de deux équations intégrales couplées (64) :

$$N_l^0(s) = B_l^P(s) + \int_{s_0}^{s_1} ds' \bar{K}_l(s, s') N_l(s') \quad (\text{III.36})$$

et

$$N_l(s) = N_l^0(s) - \frac{\lambda_l}{\pi^2} \int_{s_0}^{s_1} ds' k_0(s, s') N_l(s') \quad (\text{III.37})$$

Chew a pu construire explicitement le résolvant $O_l(s, s')$ de l'équation (III.37) :

$$N_l(s) = \int_{s_0}^{s_1} ds' O_l(s, s') N_l^0(s') \quad (\text{III.38})$$

$O_l(s, s')$ ne dépend que de λ_l . La fonction $N_l^0(s)$ est solution de l'équation intégrale

$$N_l^0(s) = B_l^P(s) + \int_{s_0}^{s_1} ds' K_l^v(s, s') N_l^0(s') \quad (\text{III.39})$$

avec

$$\bar{K}(s, s') = \int_{s_0}^{s_1} ds'' \bar{K}(s, s'') Q_2(s'', s')$$

La résolution de (III.39) permet d'obtenir $N_\ell(s)$ par l'équation (III.38). Chew a montré que l'équation (III.37) possédait une solution du type Wiener-Hopf ⁽⁶⁵⁾ pour $\delta(s_1) < \frac{\pi}{2}$ et que, sous cette même condition, l'équation (III.39) était de Fredholm.

Une solution numérique ⁽⁶⁶⁾ selon la méthode de Chew de l'équation (III.12) est possible, mais elle s'avère extrêmement compliquée. Dans notre problème nous avons préféré exploiter, du point de vue numérique, un travail théorique de Jones et Tiktopoulos ⁽⁶⁷⁾ qui ont pu montrer que des équations singulières du type (III.12) pouvaient être résolues, malgré leurs singularités, par la technique habituelle de linéarisation ⁽⁶⁸⁾ utilisée pour les équations de Fredholm.

VI - Application à la réaction d'échange de charge $\bar{W}$ -N

Nous avons maintenant tous les éléments pour aborder l'application de notre modèle à un système bien défini. Nous avons choisi le système $\bar{W}$ -N. Les amplitudes correspondantes ont été utilisées récemment dans le contexte des idées dualistes, ce qui nous permettra de faire des comparaisons avec les résultats obtenus en particulier dans les analyses sur le diagramme d'Argand.

Nous partons de l'amplitude, légèrement modifiée, utilisée par C. Schmid ⁽²⁰⁾. Nous la prenons sous la forme

$$\beta_{ex}^R(s, t) = \beta(t) \frac{[s^{\alpha(t)-1} + u^{\alpha(t)-1}]}{\Gamma(\alpha(t)) \sin \pi \alpha(t)} \left(\frac{1}{s_0}\right)^{\alpha(t)-1} \quad (11.40)$$

qui redonne quand $s \rightarrow \infty$

$$\beta_{ex}^R(s, t) = \beta(t) \frac{1 - e^{-i\pi\alpha(t)}}{i\pi\alpha(t)} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)-1} \quad (\text{III.41})$$

Cette amplitude qui est l'amplitude de renversement de spin, dans la diffusion $\bar{p}$ -N, a été utilisée pour décrire la réaction d'échange de charge (20) à haute énergie. Dans cette réaction seule la trajectoire du ρ contribue. Les résultats expérimentaux ont pu être correctement représentés avec

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 0.57 + 1.08 t \\ \overline{s_0} / m &= 1.4 \text{ GeV} \\ m &= \text{masse du nucléon} \\ \beta(t) &\simeq 60.3 \text{ mb.} \end{aligned}$$

L'onde partielle $B_{\ell}^K(s)$ est définie comme dans la référence (20) :

$$A_{\ell}^R(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \beta_{ex}^R(s, t) P_{\ell}(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

Comme nous l'avons expliqué dans la section IV de ce chapitre, cette onde partielle doit être divisée par $q^{2\ell}$ et modifiée selon (III.31) pour jouer le rôle de la fonction $B_{\ell}^P(s)$ de l'équation (III.12). Après cette modification, nous avons procédé à la résolution numérique de (III.12) selon la méthode de Jones et Tiktopoulos. La linéarisation de cette équation intégrale nous a conduit à l'inversion d'une matrice carrée de dimension 112. Les masses et les largeurs des résonances cherchées ont été calculées comme nous l'avons expliqué dans les sections II et IV de ce chapitre.

Le tableau I représente les résultats (69) que nous avons obtenus, dans l'approximation élastique, pour les ondes $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$.

Le paramètre s_1 qui figure dans les équations (III.12) et (III.13) a été choisi de manière que la région des résonances soit incluse dans l'intervalle $[s_0, s_1]$. En principe, comme nous l'avons déjà signalé dans la section IV, nos résultats ne devraient pas dépendre de s_1 . En fait, vu nos approximations, en particulier en ce qui concerne l'unitarité, on ne peut s'attendre à ce qu'il en soit effectivement ainsi. Cependant, les résultats du tableau I se sont révélés stables par rapport à des variations de s_1 dans la région $6(\text{Gev})^2 < s_1 < 13(\text{Gev})^2$. Nous ne pouvons évidemment pas comparer sans ambiguïté nos résultats aux résultats expérimentaux : nous avons omis l'analyse en spin isotopique et utilisé des ondes partielles "centrales" au lieu des amplitudes (I.14). Cette façon de procéder était essentiellement dictée par le souci de rester aussi près que possible des éléments de l'analyse de C. Schmid ⁽²⁰⁾. Nous pouvons remarquer que quelques unes des résonances que nous avons trouvées pour $\ell = 2, 3, 4, 5$ (Tableau II) pourraient être identifiées aux "résonances" trouvées par C. Schmid sur le diagramme d'Argand. Cette comparaison ne nous semble pas dénuée de sens, puisque notre amplitude de départ est essentiellement celle de C. Schmid. Nos résultats semblent corroborer l'interprétation des boucles de Schmid comme résonances. Mais, à vrai dire, vu nos approximations et les ambiguïtés que peut contenir un calcul du type N/D il convient plutôt de noter la compatibilité de nos résultats avec ceux de Schmid que d'insister sur leur identité.

VII - Application à la diffusion π^-N

1°) Choix des amplitudes de Regge

Nous nous proposons maintenant, en vue d'une comparaison plus quantitative et moins ambiguë avec les résultats expérimentaux d'une part et les résultats ⁽²¹⁾ de Collins et al d'autre part, de reprendre d'une manière plus réaliste l'analyse précédente pour la diffusion π^-N .

Nous utiliserons pour cette analyse les amplitudes $h_{J \mp 1/2}$ définies par Singh ⁽²⁴⁾ en fonction des amplitudes $f_{J \mp 1/2}$ données par la relation (I.14) :

$$h_{J \mp 1/2} = \frac{16 \pi \sqrt{s}}{(E \pm m)(2.92)^{J-1/2}} f_{J \mp 1/2}(s) \quad (\text{III.42})$$

Nous tenons compte des trajectoires de Regge échangées dans les voies t et u.

Dans la voie t les trajectoires qui interviennent sont celles du P (Pomeranchuk), du P' et du ρ dont les nombres quantiques sont consignés dans le tableau ci-dessous ⁽⁶⁹⁾.

	P	C	G	I	ρ
P	+	+	+	0	+
P'	+	+	+	0	+
ρ	-	-	+	1	-

Les lettres disposées horizontalement dans le tableau représentent respectivement la parité, la conjugaison de charge, la G-parité, l'isospin et la signature. La seule différence entre le P et le P' est que $\alpha_P(0) > \alpha_{P'}(0)$. Dans la voie u on peut échanger la trajectoire du Δ et du nucléon dont les parités sont positives et les signatures respectivement négative et positive ⁽¹¹⁾

Comme précédemment il nous faut construire pour la diffusion π -N,

une fonction $\lambda_{j+1/2}^P$ qui joue le rôle du $B_{\rho}^P(s)$ de l'équation (III.12). Nous devons pour cela préciser la forme des amplitudes de Regge qui décrivent la diffusion π -N à haute énergie. Nous avons choisi les amplitudes utilisées par Rarita et al.⁽³⁸⁾ pour la diffusion π -N vers l'avant et par Barger et Cline⁽¹¹⁾ pour la diffusion vers l'arrière.

Rarita et al.⁽³⁸⁾ donnent une paramétrisation de l'amplitude $B(s,t)$ (I.4) et de l'amplitude $A'(s,t)$ définie en fonction de $A(s,t)$ (eq. I.4) et de $B(s,t)$ par

$$A'(s,t) = A(s,t) + \left(\frac{E_L + t/4m}{1 - t/4m^2} \right) B(s,t), \quad (\text{III.43})$$

où E_L désigne l'énergie du meson π dans le système du laboratoire :

$$E_L = \frac{s - m^2 - \nu^2}{2m}, \quad (\text{III.44})$$

Rarita et al écrivent

$$\begin{aligned} A' &= C_0 \exp(C_1 t) \alpha (\alpha+1) \zeta (E_L/E_0)^\alpha && \text{pour le P et le P'} \\ A' &= C_0 \left[(1+C_2) \exp(C_1 t - C_2) (\alpha+1) \right] \zeta (E_L/E_0)^\alpha && \text{pour le } \rho, \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

$$\begin{aligned} B &= D_0 \exp(D_1 t) \alpha^2 (\alpha+1) \zeta (E_L/E_0)^{\alpha-1} && \text{pour le P et le P'} \\ B &= D_0 \exp(D_1 t) \alpha (\alpha+1) \zeta (E_L/E_0)^{\alpha-1} && \text{pour le } \rho, \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

où

$$\xi = \left[\exp(-i\pi\alpha(t)) \pm 1 \right] / \sin \pi\alpha(t)$$

est le facteur de signature et où les trajectoires α sont choisies linéaires :

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha' t \quad (III.47)$$

Dans nos équations écrites en fonction de la variable s , nous devons remplacer E_L par son expression (III.44) et E_0 par le $\bar{s}_0$ correspondant.

La paramétrisation de Barger et Cline ⁽¹¹⁾ pour la diffusion π -N vers l'arrière se rapporte aux amplitudes f_1 et f_2 (eq. I.9) :

$$f_1 = \frac{E+m}{2\sqrt{s}} \left[(\sqrt{u} - \sqrt{s} + 2m) \frac{f_1^u(\sqrt{u}, s)}{E_u + m} + (\sqrt{u} + \sqrt{s} - 2m) \frac{f_1^u(-\sqrt{u}, s)}{E_u - m} \right] \quad (III.48)$$

où $f_1^u(\sqrt{u}, s)$ est donnée par l'équation (I.20)

$$\text{avec} \quad \gamma = \beta (1 + \delta \sqrt{u}) \left(\frac{1}{s_0} \right)^{\alpha - 1/2}$$

E_u est l'énergie du nucléon dans le système du centre de masse de la voie u .

On a d'autre part (eq. I.11) la relation :

$$f_2(\sqrt{s}, u) = -f_1(-\sqrt{s}, u).$$

A partir de A^0 et B et de f_1 et f_2 ainsi paramétrisées nous obtenons les ondes partielles $h_{J\mp 1/2}^R$ à l'aide des relations (I.12). Puis nous choisissons $h_{J\mp 1/2}^P$ tel que

$$h_{J\mp 1/2}^P = h_{J\mp 1/2}^R - \frac{1}{\pi} \int_{s_g}^{s_1} \frac{\text{Im } h_{J\mp 1/2}^R(s) ds'}{s' - s} \quad (\text{III.49})$$

où s_g est le point le plus à droite de la coupure due au pôle du nucléon dans la voie croisée ($s_g = m^2 + 2\mu^2$). (voir Chapitre I, section V). Ce choix fournit une fonction réelle $h_{J\mp 1/2}^P$ dans l'intervalle $[s_g, s_1]$ et donc dans l'intervalle $[s_0, s_1]$ dans lequel nous imposons l'unitarité. Ce choix correspond également à une amplitude $h_{J\mp 1/2}$ réelle sur l'intervalle $[s_g, s_1]$.

Finalement nos équations N/D s'écrivent pour chaque valeur propre du spin isotopique $T=1/2$ et $T=3/2$

$$N_{J\mp 1/2}(s) = h_{J\mp 1/2}^P(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_g}^{s_1} \frac{h_{J\mp 1/2}^P(s') - h_{J\mp 1/2}^P(s)}{s' - s} \rho_J^\mp N_{J\mp 1/2}(s') ds' \quad (\text{III.50})$$

$$D_{J\mp 1/2}(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_g}^{s_1} \frac{\rho_J^\mp N_{J\mp 1/2}(s') ds'}{s' - s} \quad (\text{III.51})$$

avec

$$\rho_J^\pm = \frac{q(E \pm m)(2q^2)^{J-1/2}}{16\pi\sqrt{s}} \quad (\text{III.52})$$

Notre approximation fondamentale, du point de vue dynamique, apparaît clairement dans l'équation (III.50) : les effets de toutes les coupures de gauche sont supposés être approchés par $\rho_{J+1/2}^P$.

2°) Résultats numériques relatifs aux résonances.

Les valeurs numériques des paramètres du P , du P' et du ρ qui figurent dans les équations (III.45) et (III.46) sont celles de la solution I de la référence (38) :

	$\alpha(0)$	$\alpha'((\text{GeV})^{-2})$	$C_0(\text{mb GeV})$	$C_1((\text{GeV})^{-2})$	$D_0/C_0((\text{GeV})^{-1})$	$D_1-C_1((\text{GeV})^{-2})$
P	1.0	0.12	7.23	2.36	- 3.69	7.02
P'	0.73	1.50	16.35	0.44	- 3.52	3.42

	$\alpha(0)$	$\alpha'((\text{GeV})^{-2})$	$C_0(\text{mb GeV})$	$C_1((\text{GeV})^{-1})$	C_2	$D_0(\text{mb})$	$D_1((\text{GeV})^{-2})$
ρ	0.58	0.94	1.47	0.20	15.2	26.3	0.34

Les valeurs numériques des paramètres du N et du Δ sont prises dans la référence (70)

	$\beta((\text{GeV})^{-1})$	$\delta'((\text{GeV})^{-2})$	$\bar{s}_0((\text{GeV})^2)$	$\alpha(0)$	$\alpha'((\text{GeV})^{-2})$
N	20	1.1/m	0.51	- 0.34	0.74
Δ	0.13	1.0/ M_{33}	0.93	0.24	0.56

Les résonances que nous avons obtenues ⁽⁷¹⁾, dans l'approximation élastique, pour des valeurs de s_1 comprises dans l'intervalle $[6(\text{GeV})^2, 13(\text{GeV})^2]$ sont représentées dans les tableaux III et IV et comparées aux résonances expérimentales ⁽⁷²⁾ et à celles obtenues par Collins et al ⁽²¹⁾ sur le diagramme d'Argand.

Quelques uns de nos résultats, dans les états S_{11} , P_{11} , P_{13} , D_{13} , S_{31} , P_{33} , D_{33} sont très voisins des résultats expérimentaux. En particulier, pour les états de plus basses masses, les masses aussi bien que les largeurs sont correctes. Mais au dessus de 1750 Mev environ (pour $\sqrt{s} = W$) il existe des différences substantielles entre nos résultats et les résultats expérimentaux. Les nôtres sont généralement trop élevés.

La comparaison avec les résultats de Collins et al ⁽²¹⁾ ne conduit pas à une conclusion nette quant au domaine d'énergie : quelques accords et beaucoup de désaccords se rencontrent à différentes énergies. Il ne faut cependant pas oublier, comme nous l'avons signalé à la fin du Chapitre II, l'existence "d'ancêtres" dans les analyses de Collins et al : la comparaison avec de tels états "pathologiques" ⁽⁴⁴⁾ ne présente apparemment aucun intérêt. Contrairement aux résultats obtenus dans la section VI de ce Chapitre on est moins tenté d'identifier nos résonances aux "résonances" données par les boucles de Schmid.

A propos de l'origine des résonances que nous avons trouvées, nous voudrions faire une remarque importante dans l'esprit de la dualité. Dans le calcul précédent nous avons traité le Pomeranchuk sur le même pied que les autres pôles de Regge. Nous avons vu cependant à la section IV du Chapitre II que la dualité prescrit d'associer les résonances de la voie directe aux pôles de Regge échangés dans les voies croisées, à l'exception du Pomeranchuk dont le partenaire dual peut être "le bruit de fond" ⁽⁷³⁾. Dans nos calculs nous n'avons pas fait cette distinction. Nous tenions à utiliser les mêmes amplitudes que Collins et al pour avoir un élément de comparaison. En outre, ces amplitudes avaient permis de décrire d'une manière très satisfaisante

la diffusion π^-N à haute énergie vers l'avant et vers l'arrière. Nous aurions certes pu procéder selon les conceptions dules du Pomeranchuk. Mais nous avons craint d'introduire, dans la recherche de nos résonances, trop d'arbitraire par le biais d'une paramétrisation plus ou moins ad hoc de nos amplitudes. En procédant comme nous l'avons fait nous n'avons que s_1 comme paramètre libre.

3°) Résultats relatifs aux sections efficaces

Avec nos amplitudes unitarisées nous avons calculé les sections efficaces différentielles élastiques π^-p et π^+p et la section efficace d'échange de charge π^-N pour différentes valeurs de l'énergie cinétique du pion incident, dans le laboratoire, dans un interval (400 MeV , 1580 MeV). On effectue ce calcul à l'aide de la formule (I.8) en tenant compte pour chaque processus des relations imposées par l'analyse en spin isotopique. On a (11)

$$f^{\pi^-p} = \frac{1}{3} (f^{3/2} + 2 f^{1/2}) , \quad (\text{III.53})$$

$$f^{\pi^+p} = f^{3/2} , \quad (\text{III.54})$$

$$f^{e.c} = \frac{1}{3} \sqrt{2} (f^{3/2} - f^{1/2}) . \quad (\text{III.55})$$

respectivement pour les diffusions élastiques π^-p , π^+p et la réaction d'échange de charge,

La formule (I.8) donne alors pour chacun de ces processus

$$\frac{d\sigma_{\pi^-p}}{d\Omega} = \frac{1}{9} \left[\left| \left(f_{1/2}^{3/2} + 2 f_{1/2}^{1/2} \right) + \cos \theta \left(f_{1/2}^{3/2} + 2 f_{1/2}^{1/2} \right) \right|^2 + \sin^2 \theta \left| f_{1/2}^{3/2} + 2 f_{1/2}^{1/2} \right|^2 \right] \quad (\text{III.56})$$

$$\frac{d\sigma_{\pi^+p}}{d\Omega} = \left| f_{1/2}^{3/2} + \cos \theta f_{1/2}^{3/2} \right|^2 + \sin^2 \theta \left| f_{1/2}^{3/2} \right|^2 \quad (\text{III.57})$$

$$\frac{d\sigma_{e.c.}}{d\Omega} = \frac{2}{9} \left[\left| \left(f_{1/2}^{3/2} - f_{1/2}^{1/2} \right) + \cos \theta \left(f_{1/2}^{3/2} - f_{1/2}^{1/2} \right) \right|^2 + \sin^2 \theta \left| f_{1/2}^{3/2} - f_{1/2}^{1/2} \right|^2 \right] \quad (\text{III.58})$$

Les amplitudes $f_{1/2}^{3/2}$, $f_{1/2}^{1/2}$, $f_{1/2}^{3/2}$ et $f_{1/2}^{1/2}$ sont calculées à partir de $h_{1/2}^{1/2}$ et $h_{1/2}^{3/2}$ grâce aux relations (III.42) et (I.13).

Nous avons tracé nos courbes de sections efficaces en les comparant aux données expérimentales (74,75,76,77,78,79). Pour la diffusion élastique π^-p avec $T_{\pi} \leq 1080$ MeV, nos courbes reproduisent les résultats expérimentaux d'une manière satisfaisante (fig. III.3, III.4, III.5, III.6). Il y a cependant un désaccord important au point $\theta = 0^\circ$ pour $550 \leq T_{\pi} \leq 700$ MeV (Fig. III.4 et III.17) avec les données des références 74 et 75. Cependant ce désaccord disparaît si l'on compare avec les résultats plus récents de la référence (76) : un creux (dip) à $\theta = 0$ et $T_{\pi} = 650$ MeV : prévu par nos calculs est remarquablement confirmé par les expériences de la référence (76) (Fig. (III.8)). Ce point à $\theta = 0$ et $T_{\pi} = 650$ MeV est également préféré par notre courbe théorique (Fig. III.17) pour la diffusion π^-p vers l'avant. Cependant nos accords avec les résultats expérimentaux sont, d'une manière générale, moins bons et parfois même mauvais pour $T_{\pi} \gg 1080$ MeV.

Pour la diffusion $\pi^+ p$ avec $T_\pi \leq 1080$ MeV nous avons des accords raisonnables avec les résultats expérimentaux (Fig. III.11, III.12, III.13, III.14). Mais des creux (dip) prédits par nos calculs à $T_\pi = 990$ MeV et $T_\pi = 1080$ MeV ne sont pas observés expérimentalement (Fig. (III.13, III.14)). Pour la diffusion $\pi^+ p$ vers l'avant nous notons un grand désaccord à $T_\pi = 1300$ MeV (Fig. (III.16)). En général pour la diffusion élastique $\pi^+ p$ nous obtenons de moins bons résultats que pour la diffusion $\pi^- p$ à l'exception des résultats de la fig. (III.14).

Pour la réaction d'échange $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ nous obtenons de bons accords avec les résultats expérimentaux jusqu'à $T_\pi = 1300$ MeV (Fig. (III.9), III.10). Pour la section efficace vers l'avant l'accord est très satisfaisant, fig (III.15).

4°) Conclusions

Nous voudrions formuler ici quelques remarques générales concernant nos résultats. De nos résultats, dans l'état actuel de nos recherches, dans le cadre de la méthode N/D, nous ne pouvons tirer de conclusions fermes relativement au problème de la correspondance entre les pôles dans le second feuillet et les "résonances" (20) obtenues par l'analyse sur le diagramme d'Argand d'ondes partielles provenant d'amplitudes de Regge. Mais il semble que les amplitudes de Regge unitarisées décrivent beaucoup de faits observés expérimentalement à des énergies relativement basses. Nous avons pu retrouver, à partir d'amplitudes de Regge décrivant bien la situation expérimentale à haute énergie (11,38), les résonances expérimentales de plus basses masses (S_{11} , P_{11} , P_{13} , P_{13} , S_{31} , P_{33} , D_{33}). En outre, dans environ le même domaine d'énergie, nos sections efficaces sont dans l'ensemble en bon, et parfois très bon, accord avec les résultats expérimentaux.

Pour les énergies supérieures à $W = \sqrt{s} = 1700$ MeV un traitement plus correct de l'unitarité s'impose : nous devons nous affranchir de l'hypothèse de l'unitarité élastique. Remarquons bien que le seuil d'inélasticité

est dépassé bien avant 1700 Mev. Mais nos résultats laissent penser que, jusqu'à cette énergie, nos calculs ne s'écartent pas trop de la réalité : il semble que le paramètre s_1 simule en quelque sorte les effets inélastiques.

Nous verrons dans le chapitre suivant comment on peut introduire l'inélasticité dans le cadre de la méthode N/D. Nous examinerons, en outre, le comportement asymptotique des ondes partielles unitarisées en relation avec le comportement à la Regge.

CHAPITRE IV

I - Comportement asymptotique des ondes partielles unitarisées

Comme nous venons de le voir, des amplitudes de Regge modifiées à l'aide d'une version adéquate de la méthode N/D peuvent contenir les résonances de la voie directe et rendre compte des sections efficaces à basse et moyenne énergie. Mais immédiatement se pose la question de savoir si, une fois modifiées, les amplitudes conservent leur comportement à la Regge. Rappelons que le $B_\ell^P(s)$ que nous avons utilisé se déduit du B_ℓ^R (qui possède le comportement de Regge $\frac{s^{\alpha(0)-\ell-1}}{\log(s)}$) par la relation (III.31). Sur cette relation, on voit que $B_\ell^P(s)$ se comporte comme $\frac{1}{s}$ quand s tend vers $+\infty$. En outre, en revenant aux équations (III.7), (III.8) et (III.10), on peut écrire :

$$N_\ell(s) = B_\ell^P D_\ell(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds' B_\ell^P(s')}{s' - s} \rho_\ell(s') N_\ell(s') ds' ,$$

où

$$B_\ell(s) \equiv \frac{N_\ell(s)}{D_\ell(s)} = B_\ell^P(s) + \frac{1}{\pi D_\ell(s)} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds' B_\ell^P(s') \rho_\ell(s') N_\ell(s') ds'}{s' - s} . \quad (IV.1)$$

Quand s tend vers $+\infty$,

$$D_\ell(s) \longrightarrow 1 \quad (\text{voir éq. III.6}) ,$$

et le deuxième terme de (IV.1) se comporte comme $\frac{1}{s}$. Finalement, $B_\ell(s)$ se présente comme la somme de deux termes se comportant, chacun, comme $\frac{1}{s}$, quand s tend vers $+\infty$. Il est clair que, dans le meilleur des cas, la combinaison de ces deux termes pourra donner un comportement en s^a avec a plus petit que -1 et indépendant de ℓ . C'est dire que nos ondes partielles modifiées n'ont pas le comportement de Regge en $\frac{s^{\alpha(0)-\ell-1}}{\log(s)}$.

Il faut bien comprendre que cette perte du comportement de Regge n'est pas due au fait que nous avons choisi un $B_\ell^P(s)$ défini par (III.31) pour assu-

rer sa réalité sur le segment $[s_0, s_1]$. Nous aurions pu, comme nous l'avons déjà signalé, assurer la réalité de $B_\ell^P(s)$ en remplaçant dans (III.30) $s^{\alpha(\tau)}$ par $(s-s_1)^{\alpha(\tau)}$, auquel cas $B_\ell^P(s)$ se serait comporté, pour s tendant vers $+\infty$, comme $B_\ell^R(s)$, c'est-à-dire en $\frac{s^{\alpha(0)-\ell-1}}{\log(s)}$. Mais, d'après (IV.1), $B_\ell(s)$ ne tendrait vers $B_\ell^P(s)$ que si

$$-\alpha(0) + 1 + \ell < 1,$$

où

$$\ell < \alpha(0). \quad (IV.2)$$

Dans la diffusion π -N, $\alpha(0)$ correspond au Pomeranchuk et vaut 1. La relation (IV.2) montre que, sauf, peut-être, l'onde S, toutes les ondes partielles perdent leur comportement de Regge. Ceci vient évidemment de ce que les ondes partielles qui interviennent dans la méthode N/D sont les ondes partielles réduites, c'est-à-dire divisées par $q^{2\ell}$: sans ce facteur, la relation (IV.2) deviendrait

$$0 < \alpha(0), \quad (IV.3)$$

et toutes les ondes partielles conserveraient apparemment leur comportement de Regge. Mais le facteur $q^{2\ell}$, outre qu'il assure le comportement à l'origine des ondes partielles, comportement important pour nous, puisque nous descendons vers les basses énergies, il est nécessaire à la convergence des intégrales qui interviennent dans nos équations. On perd, en tous cas, le comportement de Regge dans le formalisme que nous avons adopté, si on tient à assurer le comportement au seuil des ondes partielles. De ce point de vue, le modèle fondé sur le formalisme de la matrice K semble ne pas présenter cet inconvénient⁽⁴⁷⁾. On peut cependant noter, en passant, que dans ce modèle⁽⁴⁷⁾ il n'est pas du tout certain que les pôles cherchés se trouvent dans le second feuillet. D'autre part, la tentative d'André Martin⁽⁸⁰⁾ de faire passer les pôles de l'amplitude de Veneziano dans le second feuillet ne préserve pas, elle non plus, le comportement de Regge normal. Le problème de construire une amplitude unitaire avec des pôles dans le second feuillet et possédant un comportement de Regge normal n'est pas à notre connaissance complètement résolu⁽³⁴⁾. C'est dire qu'il l'est encore moins, si, de plus, on veut conserver la symétrie de croisement⁽³⁴⁾.

II - Introduction de l'inélasticité

Dans les équations (III.12), (III.13), (III.51), (III.52), la fonction ρ est donnée par l'unitarité élastique. Comme nous l'avons vu à la fin du Chapitre III, malgré la possibilité de jouer sur le paramètre s_1 pour tenir compte d'une manière effective de l'inélasticité, nous ne pouvons au delà d'une certaine énergie nous contenter de cette fonction ρ dans nos calculs.

Dans le cadre de la méthode N/D on peut tenir compte de l'inélasticité de trois manières différentes :

1°) La méthode N D⁻¹ matricielle (81)

Cette méthode, malgré sa simplicité formelle, contient, comme presque toujours en physique, à la fois des difficultés théoriques et techniques (82). En outre, elle n'est pratiquement utilisable que si l'on se restreint aux canaux inélastiques à deux corps. Nous avons, J. Letessier et moi-même, appliqué cette méthode à la diffusion Hypéron-Nucléon, pour tenir compte en particulier de l'influence de l'ouverture du canal ΣN sur la diffusion ΛN . Nous avons ainsi pu mettre en évidence des effets de couplage importants entre les différents canaux (83).

2°) La méthode de Frye et Warnock (84)

On écrit que

$$B_l(s) = \eta_l(s) \frac{e^{2i\delta_l^R(s)} - 1}{2i\rho_l(s)}$$

où $\delta_l^R(s)$ désigne la partie réelle du déphasage ;

$$\delta_l(s) = \delta_l^R + i\delta_l^I(s)$$

et

$$\eta(s) = e^{-2\delta_l^I(s)},$$

avec évidemment

$$\eta_l(s) = 1 \quad \text{pour} \quad s_0 < s < s_1 \quad (s_1 \text{ premier seuil inélastique})$$

$$\eta_l(s) \longrightarrow 0 \quad \text{si l'amplitude devient complètement inélastique.}$$

On est alors conduit à des équations du type (84)

$$\bar{N}_l(s) = \bar{B}_l(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\bar{B}_l(s') - \bar{B}_l(s)}{s' - s} \frac{\rho_l(s')}{\eta_l} \bar{N}_l(s') ds'$$

$$D_l(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\rho_l(s') \bar{N}(s') ds'}{s' - s}$$

où

$$\bar{N}_l(s) = \frac{2\eta_l(s)}{1+\eta_l(s)} \operatorname{Re} \{N_l(s)\}$$

$$\bar{B}_l(s) = B_l^P + \frac{P}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{[1 - \eta_l(s')]}{2\rho_l(s')} \frac{ds'}{s' - s}$$

Il faut évidemment pour faire les calculs se donner un modèle pour la fonction $\eta_\ell(s)$.

3°) La méthode de Froissart ⁽⁸⁵⁾

Froissart définit un paramètre d'inélasticité $R_\ell(s)$ par

$$R_\ell(s) = \frac{\sigma_\ell^{\text{tot}}(s)}{\sigma_\ell^{\text{ela}}(s)} \quad (\text{IV.4})$$

qu'on peut exprimer en fonction de B_ℓ et de $\rho_\ell(s)$.

$$R_\ell(s) = \frac{\text{Im } B_\ell(s)}{|B_\ell(s)|^2} \cdot \frac{1}{\rho_\ell(s)} \quad (\text{IV.5})$$

ce qui donne

$$\text{Im} \left\{ \frac{1}{B_\ell(s)} \right\} = -\rho_\ell(s) R_\ell(s).$$

La seule modification qu'entraîne la méthode de Froissart dans nos équations N/D du Chapitre III est la substitution dans ces équations du produit $\rho(s) R_\ell(s)$ au facteur $\rho_\ell(s)$. Pour cette raison et aussi parce qu'il existe un lien ⁽⁸⁶⁾ entre la fonction $R_\ell(s)$ et les effets des coupures dans le plan du moment angulaire, la méthode de Froissart nous paraît particulièrement intéressante. Mais il ne semble pas, pour le moment, compte tenu du peu d'informations dont on dispose sur les coupures et en particulier sur leurs discontinuités, que ce lien puisse être facilement formulé d'une manière explicite.

III - Modèle pour $R_\ell(s)$

Devant les difficultés que nous venons de signaler on peut essayer de construire des modèles pour la fonction $R_\ell(s)$.

La relation (IV.5) peut être mise sous la forme

$$\operatorname{Im} B_\ell(s) = \rho_\ell(s) R_\ell(s) / |B_\ell(s)|^2 \quad (\text{IV.6})$$

qui n'est autre que la relation d'unitarité inélastique. Connaissant le comportement asymptotique ^(60,62) à la Regge de $B_\ell(s)$, $\rho_\ell(s)$ étant déterminé par l'unitarité élastique, on peut évidemment trouver la forme asymptotique de $R_\ell(s)$ par identification des comportements asymptotiques des deux membres de (IV.6). On obtient ainsi ⁽⁸⁷⁾ dans le cas π -N, un comportement de la forme

$$R_{\ell^\pm}^T(w) \xrightarrow{w \rightarrow \infty} \frac{\alpha'(0) \log(w)}{\sigma_{\text{Tot}}^T(\infty)} \quad (\text{IV.7})$$

où

$$w = \sqrt{s}$$

et où T désigne le spin isotopique. Un modèle pour $R_{\ell^\pm}^T$ devra tenir compte de la condition (IV.7) et aussi de la condition

$$R_{\ell^\pm}^T(w) = 1 \quad \text{pour } w < w_I \quad (\text{premier seuil inélastique}),$$

Il est clair que cela conduira à introduire un certain nombre de paramètres

arbitraires, ce qui peut altérer gravement le sens de nos calculs : explorer le contenu à basse et moyenne énergie d'amplitudes de Regge complètement déterminées par les données expérimentales à hautes énergies. L'expression de $R_\ell(s)$ avec un minimum de paramètres serait cependant très utile, indépendamment de notre problème.

CONCLUSION

Dans l'étude qui précède, nous nous sommes efforcés de comprendre les notions de dualité globale et locale et leurs implications quant à la dynamique des interactions fortes. Cela nous a tout naturellement conduit à envisager le problème de la construction d'amplitudes de Regge, unitaires et possédant des pôles (résonances dans la voie s) et d'en examiner le contenu physique à des énergies relativement basses. Pour éviter l'introduction d'un nombre élevé de paramètres libres, nous avons préféré partir des amplitudes de Regge de la diffusion π -N complètement déterminées par les données expérimentales à haute énergie^(11,20,38,69), que nous avons modifiées par une méthode N/D tenant compte des particularités analytiques des amplitudes de Regge. L'utilisation de ces amplitudes^(11,20,38,69) nous permettait, en outre, de comparer nos résonances aux "résonances" obtenues sur le diagramme d'Argand par différents auteurs^(20,29).

Nous avons été conduits aux principales conclusions suivantes :

La correspondance entre nos résonances définies comme pôles (formules de Breit-Wigner) et les "résonances" associées aux boucles d'Argand obtenues dans une analyse en ondes partielles^(20,21) des amplitudes de Regge de la diffusion π -N, n'est pas systématique dans le cadre de notre étude. N'eussent été les ambiguïtés et l'arbitraire qui entachent la paramétrisation des amplitudes de Regge, cela conduirait à constater l'inéquivalence des définitions d'une résonance par une formule de Breit-Wigner d'une part et par une boucle d'Argand d'autre part. En tout cas la technique de détermination des résonances par le diagramme d'Argand devra être utilisée, pensons nous, avec beaucoup de précautions.

Parmi les résonances que nous avons trouvées, celles qui correspondent aux plus basses masses peuvent être identifiées (masse et largeur) aux résonances expérimentales ($S_{11}, P_{11}, P_{13}, S_{31}, P_{33}, D_{33}$) du système π N. Ce résultat

nous paraît particulièrement intéressant. Outre qu'il atteste la validité des amplitudes de Regge unitarisées à moyenne et même à basse énergie ⁽⁸⁸⁾ il permet de mieux comprendre les notions de dualité ; les pôles de Regge échangés dans les voies croisées, qui dominent l'amplitude à haute énergie, engendrent les résonances de la voie directe, ou encore les contributions des résonances de la voie directe sont contenues dans les contributions des pôles de Regge échangés dans les voies croisées. On savait depuis longtemps que les singularités des voies croisées étaient reliées aux singularités des voies directes : la dualité précise ce lien entre pôles de la voie s et pôles des voies t et u .

Nos résonances de masses élevées ($\sqrt{s} > 1700$ MeV) diffèrent sensiblement des masses expérimentales. Nous pensons que ces différences peuvent être atténuées par un traitement plus réaliste de l'unitarité. Nous avons vu ⁽⁸⁶⁾ que ce problème peut être relié, dans le cadre de la méthode N/D, à l'introduction de coupures dans le plan du moment angulaire. La détermination, dans cette optique, de la fonction $R_\lambda(s)$ ⁽⁸⁵⁾ dont on peut aisément avoir la forme asymptotique dans le cadre du modèle de Regge, présenterait un grand intérêt.

Les amplitudes de Regge modifiées conduisent à des sections efficaces en bon et parfois très bon accord avec les résultats expérimentaux à des énergies relativement basses. Il convient de bien noter ici qu'il ne s'agit pas d'un ajustement (fit) : les paramètres des amplitudes de Regge décrivant la diffusion à haute énergie sont fixés une fois pour toutes ^(11,20,38,69). Le paramètre s_1 (eq. III.12) est le seul paramètre libre dans notre problème. Il a été fixé dans la recherche des résonances dont la position est pratiquement indépendante des variations de s_1 dans l'intervalle $[6 \text{ GeV}^2, 13 \text{ GeV}^2]$. Le calcul des sections efficaces élastiques τ_p , τ_p^+ et de la section efficace d'échange de charge a été effectué avec ce paramètre ainsi déterminé.

Après les modifications que nous leur avons fait subir, les amplitudes de Regge perdent malheureusement leur comportement à la Regge, phénomène qu'on observe aussi dans l'unitarisation de l'amplitude de Veneziano par d'autres techniques⁽⁸⁰⁾. Malgré les résultats intéressants obtenus par diverses approches, le problème de la construction d'une amplitude unitaire, avec des pôles dans le second feuillet, possédant le comportement normal de Regge, et dont les ondes partielles possèdent un comportement normal au seuil, n'est pas encore, à notre connaissance, complètement résolu.

REFERENCES

- (1) T. Regge :Nuovo Cimento 14, 951 (1959) ; 18, 947 (1960).
- (2)- M. Froissart et R. Omnès:" Mandelstam theory and Regge pôles"
Benjamin Inc. (1963).
 - E.J. Squires " Complex angular momentum and particle physics "
Benjamin Inc. (1963).
 - L. Van Hove; 1966 Scottish Universities "Summer School Particle
Interaction,at High Energies (1967).
 - B.E.Y. Svensson: " High energy phenomenology and Regge poles "
Proceeding of the 1967 CERN school of physics, CERN report 67-24 .
 - L. Van Hove; " Topics on Regge pole Theory of high energy scattering,
CERN report 68-31.
- (3) G.F. Chew et S.Frautschi:Phys. Rev. Letters 8, 41 (1962).
- (4) S.C. Frautschi: " Regge poles and S-Matrix Theory "
Benjamin Inc. (1963) p. 107.
- (5) E.C. Titchmarsh:" The Theory of functions ", 2nd edition (Oxford
University Press, London), p. 185.
- (6) M. Froissart: Phys Rev. 123, 1053.
- (7) S.D.Drell: Rev. Mod. Phys. 33, 458 (1961).
- (8) D.R.O. Morrison: Phys. Letters 22, 528 (1966).
- (9) M. Jacob et C.G. Wick: Ann. Phys. 7, 404 (1959)
- (10) G. Cohen-Tannoudji, A. Morel et H. Navelet: Ann. Phys. 46, 239 (1967)
- (11) V. Barger et D. Cline: Phys. Rev. 155, 1792 (1967)

- (12) H.J. Lubatti : " Regge Poles in high energy scattering ", Proceedings of The International School of Physics "Ettore Majorana" (Acad. Press, New York, 1966), (édité par A. Zichichi), p. 346.
- (13) J.D. Jackson : " Models in high energy process ", Proceedings of the Lund International Conference (25 juin-1 juillet, 1969).
- (14) S. Mandelstam : Nuovo Cimento 30, 1148 (1963).
- (15) S. Mandelstam et L.L. Wang : Phys. Rev. 160, 1490 (1967).
- (16) C.E. Jones et V.L. Teplitz : Phys. Rev. 159, 1271 (1967).
- (17) L. Bertochi : Theoretical aspects of high energy phenomenology, Proceedings of the Heidelberg International Conference on elementary particles, 20-27 septembre, 1967 (North. Holland Publishing Company, Amsterdam).
- (18) R. Dolen, D. Horn et C. Schmid : Phys. Rev. Letters, 19, 402 (1967).
- (19) R. Dolen, D. Horn et C. Schmid : Phys. Rev. 166, 1768 (1968).
- (20) C. Schmid : Phys. Rev. Letters 20, 689 (1968).
- (21) P.D.B. Collins, R.L. Johnson et E.J. Squires : Phys. Lett. 27B, 23 (1968)
- (22) Voir, par exemple, M. Jacob et G.F. Chew : "Strong interaction physics" Benjamin Inc. (1964).
- (23) J. Hamilton : "Application of dispersion relations to pion-nucleon and pion-pion phenomena", Proceedings of the Scottish Universities Summer School (Oliver & Boys, London 1964).
- (24) V. Singh : Phys. Rev. 129, 1889 (1962).
- (25) R.J. Eden : "High Energy Collisions of elementary particles", Cambridge University Press (1967)
- (26) M. Froissart : communication à la Conférence de La Jolla sur les interactions fortes et faibles.

V.N. Gribov : JETP 41, 677 (1961) (Translation, Soviet Physics JETP 14, 478, 1962).

- (27) G.F. Chew, M.L. Goldberger, F.E. Low et Y. Nambu : Phys. Rev. 106, 1327 (1957).
- (28) R. Oehme : " Complex angular momentum ", Proceedings of the Scottish Universities Summer School (Oliver & Boys, London 1964).
- (29) V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan et G. Rosetti : Phys. Lett. 21, 576 (1966).
- (30) M.G. Olsson : Phys. Rev. Letters 19, 550 (1967).
A. Della Silva, L. Masperi et R. Oderico : Nuovo Cimento, 55A, 979 (1968).
- (31) C. Schmid : Phys. Rev. Letters 20, 628, (1968).
- (32) S. Matsudo et K. Igi : Phys. Rev. Letters 18, 625 (1967).
- (33) C. Schmid : TH 1128 CERN.
- (34) G.E. Hite : "Regge pole model", Rev. of Mod. Physics, 41, 705 (1969).
- (35) M. Jacob : TH 1010 CERN.
- (36) G.F. Chew : Comments on nuclear and particles physics II, 74 (1968).
- (37) F. Arbab et C.B. Chiu : Phys. Rev. 147, 1645 (1966).
- (38) W. Rarita, R.J. Riddell, C.B. Chiu et R.I.N. Phillips : Phys. Rev. 165, 1615 (1968).
- (39) R.E. Kreps et R.K. Logan : Phys. Rev. 177, 2328 (1969).
N.R. Lipshutz : Nuovo Cimento 57A, 712 (1968)
- (40) R.H. Dalitz : Annual Review of Nuclear Science 13, 339 (1963).
- (41) P. Bareyre, G. Bricman et G.V. Villet : Saclay preprint (1967).
- (42) C.B. Chiu et A. Kotanski : Nucl. Phys. B8, 553 (1969).
- (43) N.A. Alessandrini, P.G.O. Freund, R. Oehme et E.J. Squires : IC/68/51, (juin 1968).
- (44) M. Jacob : Ecole Internationale de la Physique des particules élémentaires "Résonances and exchange process"(1968).

- (45) C. Schmid : Nuovo Cimento 61 A, 289.
- (46) G.F. Chew : S-Matrix theory of strong interactions (Benjamin Inc. New-York, 1968).
- (47) C. Cohen-Tannoudji, A. Morel et Ph. Salin : TH 1003 CERN, (1969).
- (48) R.H. Dalitz : Rev. Mod. Phys, 33, 471 (1961).
- (49) C. Lovelace : CERN Preprint 1041 (1969).
- (50) G. Veneziano : Nuovo Cimento 57, 190 (1968).
- (51) G.F. Chew et S Mandelstam : Phys. Rev. 119, 467 (1960).
- (52) B. Diu : "Qu'est-ce qu'une particule élémentaire ?", Masson & Cie, Paris, 1965)
S. Gasiorowicz : "Elementary particles physics" (John Wiley & Sons Inc. New-York, 1966).
- (53) D. Atkinson, L.A.P. Balaz, F. Calogero, P. Di Vecchia, A. Grilo et M. Lusignoni : Phys. Lett. 29 B, 423 (1969).
- (54) H. Cartan : " Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes " (Herman, Paris 1961).
- (55) L. Castillejo, R.H. Dalitz et F. Dyson : Phys. Rev. 101, 453 (1956).
- (56) P.D.B. Collins et R.C. Johnson : Phys. Rev. 182, 1755 (1969).
- (57) S. Mandelstam : Phys. Rev. 115, 1741, 1752 (1959).
- (58) G.F. Chew et G.E. Jones : Phys. Rev. 135, B, 208 (1964).
- (59) P.D.B. Collins et V. Teplitz : Phys. Rev. 140, B, 663 (1965).
- (60) R.L. Warnock : Lectures in Theoretical high energy physics (édité par H.H. Aly), John Wiley & Sons, London 1968.
- (61) R. Omnès : Phys. Rev. 133, B, 1543 (1964).
- (62) E.J. Squires : Nuovo Cimento 34, 1277 (1964).
- (63) T.K. Kinoshita : Phys. Rev. 154, 1438 (1967).

- (64) G.F. Chew : Phys. Rev. 130, 1264 (1962).
- (65) Voir, par exemple, B. Noble : " The Wiener-Hopf Technique " (Pergamon Press, New-York 1958).
- (66) D.C. Teplitz et V.C. Teplitz : Phys. Rev. 137, B, 142 (1967).
- (67) G.E. Jones et G. Tiktopoulos : Journal of Math. Physics, 331 (1965).
- (68) L.V. Kantorovich et V.I. Krylov : "Approximate methods of higher analysis", P. Noordhoff, Groningen (1958).
- (69) J. Letessier et A. Tounsi : Nuovo Cimento, 64 A, 345 (1969).
- (70) V. Barger et D. Cline : Phys. Rev. Lett. 19, 1504 (1967).
- (71) J. Letessier et A. Tounsi : Nuovo Cimento 65 A, 808 (1970).
- (72) N. Barash-Schmidt, A. Barraro-Galtieri, L.R. Price, A.H. Rosenfeld, P. Söding, L.G. Wohl, M. Ross et G. Conforto : Rev. Mod. Phys. 41, 109 (1969).
- (73) H. Harari : Phys. Rev. Lett. 20, 1395 (1968).
- (74) J.A. Helland, C.D. Wood, T.J. Devlin, D.E. Hagge, M.J. Longo, B.J. Moyer et V. Perez-Mendez : Phys. Rev. 134 B, 1079 (1964).
- (75) P.B. Oyden, D.E. Hagge, J.A. Helland, M. Banner, J.F. Detoeuf et J. Teiger : Phys. Rev. 137 B, 1115 (1964).
- (76) S. Femino, S. Jannelli et F. Mezzanares : Nuovo Cimento 52 A, 892 (1967).
- (77) P.J. Duke, D.P. Jones, M.A.R. Kemp, P.G. Murphy, J.D. Rentice et J.J. Thresher : Phys. Rev. 149, 1077 (1966).
- (78) C.B. Chiu, R.D. Eandi, A.C. Helmholtz, R.W. Kenney, B.J. Mayer, J.A. Poirier, W.B. Richards, R.J. Cence, V.Z. Peterson, N.K. Sehgal et V.J. Stenger : Phys. Rev. 156, 1415 (1966).
- (79) J.A. Helland, T.J. Devlin, D.E. Hagge, M.J. Longo, B.J. Moyer et C.D. Wood : Phys. Rev. 134, B 1062 (1964).

- (80) A. Martin : Phys. Letters 29 B, 431 (1969).
- (81) J.D. Bjorken : Phys. Rev. Letters 4, 473 (1960).
- (82) R.L. Warnock : Nuovo Cimento 50 A, 894 (1967).
M. Bander, M.P.W. Coulter et G.L. Shaw : Phys. Rev. Letters, 14, 230 (1965).
- (83) J. Letessier et A. Tounsi : Nuovo Cimento 54 A, 67 (1967).
J. Letessier : Thèse, Paris (1970).
- (84) G. Frye et R.L. Warnock : Phys. Rev. 130, 418 (1963).
- (85) M. Froissart : Nuovo Cimento 22, 191 (1961).
- (86) C.E. Jones et V.L. Teplitz : Phys. Rev. 159, 1213 (1967).
- (87) R.W. Childers et A.W. Martin : Phys. Rev. 182, 1743 (1970).
- (88) J. Stern et R. Zaoui : Nuclear Physics B 17, 253 (1970).

LEGENDES DES TABLEAUX

Tableau I : Valeurs des masses (en MeV) et des largeurs Γ ($M\Gamma$ en $(\text{GeV})^2$) comparées aux valeurs expérimentales.

Tableau II : Valeurs des masses (en MeV) comparées aux résultats de C.Schmid⁽²⁰⁾.

Tableau III : Valeurs des masses (en MeV) et des largeurs Γ ($M\Gamma$ en $(\text{GeV})^2$) pour l'isospin $T = 1/2$ comparées aux résultats expérimentaux et aux résultats de Collins et al⁽²¹⁾.

Tableau IV : Valeurs des masses (en MeV) et des largeurs Γ ($M\Gamma$ en $(\text{GeV})^2$) pour l'isospin $T = 3/2$ comparées aux résultats expérimentaux et aux résultats de Collins et al⁽²¹⁾.

	Nos Résultats $M(M\Gamma)$	Résultats Expérimentaux $M(M\Gamma)$
$\ell = 0$	1800 (0,5) 2550 (0,4)	S_{11} 1550 (0,20) 1710 (0,50) S_{31} 1640
$\ell = 1$	1900 (1)	P_{33} 1236 (0,15) P_{11} 1470
$\ell = 2$	1700 (0,4) 2350 (1)	D_{13} 1518 (0,18) D_{15} 1680
$\ell = 3$	2150 (1) 2650 (0,2)	F_{37} 1920 (0,4) F_{15} 1688
$\ell = 4$	1900 (0,6) 2450 (0,8)	G_{17} 2190 (0,55)
$\ell = 5$	2450 (0,4) 2600 (0,6)	2420 (0,7)

Tableau I

	Nos Résultats	Résultats de Schmid
$\ell = 2$	1700	1800
$\ell = 3$	2150	2070
$\ell = 4$	1900	2260
$\ell = 5$	2450	2475

Tableau II

$T = 1/2$	Masses expérimentales MeV	$M\Gamma$ GeV^2	Nos résultats	$M\Gamma$	Résultats de Collins et al	$M\Gamma$
S_{11}	1550	0,2	1600	0,17	1930	0,19
	1710	0,5	1850	0,6	2120	0,30
P_{11}	1470	0,36	1470	0,28	1420	0,35
	1750	0,3	1780	0,2		
P_{13}	1860	0,21	1800	0,3	1950	0,58
			1980	1,65		
D_{13}	1518	0,18	1700	0,38		
	1730 ?	0,26	1900	0,40	1640	0,33
	1980 ?		2100	0,70		
D_{15}	1680	0,3	2100	0,50	1980	0,4
F_{15}	1690	0,22	2480	0,60	1690	0,34
F_{17}	1980 ?	0,13	2650	0,4	1610	0,32
G_{17}	2190	0,55	2040	0,7	2000	0,6
G_{19}	2650 ?	0,95	2770	1,1	1900	0,57
H_{19}	3030 ?		2580	0,8		
H_{111}			2800	1,4		

Tableau III

T = 3/2	Masses expérimentales MeV	$M\Gamma$ GeV^2	Nos résultats	$M\Gamma$	Résultats de Collins et al	$M\Gamma$
S_{31}	1630	0,26	1600 2480	0,20 1,20	1390 2220	0,35 0,44
P_{31}	1905	0,57	2000 2200	0,51 0,83	1410	0,21
P_{33}	1236 1690 ?	0,15	1240 1800	0,17 0,58	1300	0,26
D_{33}	1670	0,38	1710 1970	0,40 0,62	1760	0,35
D_{35}			2380	1,10	1740	0,52
F_{35}	1880	0,47	1980	0,55	1520	0,23
F_{37}	1940	0,41	2700	0,57	1480	0,30
G_{37}			2330	0,64	1690	0,42
G_{39}			2800	1	1820	0,36
H_{39}			2770	1		
H_{311}	2420	0,75	2700	1,1		

Tableau IV

LEGENDES DES FIGURES

Fig. I.1 : Schéma de la diffusion π -N.

Fig. I.2 : Structures analytiques des ondes partielles ℓ dans le plan (s).

Fig. II.1 : Comparaison de $2 \operatorname{Im} A'^{(-)} = k (\sigma_{\text{tot}}(\pi^- p) - \sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p))$ avec le terme de Regge extrapolé vers les basses énergies. Ces deux termes apparaissent respectivement dans le premier et le second membre de la règle de somme à énergie finie par $A'^{(-)}$. (figure prise dans la référence 33).

Fig. II.2 : Les premiers zéros associés à chaque résonance dans $A'^{(-)}$ et $B^{(-)}$. Ceux qui correspondent à $A'^{(-)}$ se trouvent aux environs de $t = -0.2 \text{ GeV}/c$, et ceux qui correspondent à $B^{(-)}$ aux environs de $t = -0.6 \text{ GeV}/c$ (fig. prise dans la référence 19).

Fig. II.3 : Projection en ondes partielles de l'amplitude d'échange donnée par le ρ .

a) - c) L'amplitude $B_\ell(P_L)$ pour ℓ fixé en fonction de P_L impulsion du π dans le système du laboratoire. Les nombres le long des cercles donnent la valeur de P_L .

d) - $B_\ell(P_L)$ pour P_L fixé en fonction de ℓ . Les nombres le long du cercle donnent les valeurs de ℓ .

(fig. prise dans la référence 33).

Fig. II.4 : Le diagramme de Chew-Frautschi :

A) Les résonances expérimentales π -N.

B) Les résonances N^* obtenues à partir du terme du ρ sur le diagramme d'Argand. E_L désigne l'énergie dans le système du laboratoire du méson π .

(fig. prise dans la référence 33).

Fig. III.1 : La représentation de Chew-Jones (réf.58) : trois bandes i, j, k.

Fig. III.2 : Bandes où les termes de Regge dominent la fonction spectrale double (réf. 58).

Fig. III.3 à III.8 : Sections efficaces différentielles $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (mb/sr) de la diffusion élastique $\pi^- p$ pour différentes valeurs de l'énergie cinétique T_π du pion dans le système du laboratoire.

Fig.III.3 : $T_\pi = 410$ MeV

et $T_\pi = 533$ MeV

Fig.III.4 : $T_\pi = 698$ MeV

Fig.III.5 : $T_\pi = 990$ MeV

et $T_\pi = 1000$ MeV

Fig.III.6 : $T_\pi = 1080$ MeV

Fig.III.7 : $T_\pi = 1579$ MeV

Fig.III.8 : $T_\pi = 650$ MeV

Les points expérimentaux sont représentés comme suit :

○ J.A. Helland et al. ⁽⁷⁴⁾

△ P.D. Ogden et al. ⁽⁷⁵⁾

▲ S. Femino et al. ⁽⁷⁶⁾

● P.J. Duke et al. ⁽⁷⁷⁾

Fig. III.9 et Fig. III.10 : Sections efficaces différentielles $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (mb/sr) de la réaction $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ pour différentes valeurs de T_π .

Fig.III.9 : $T_\pi = 500$ MeV

et $T_\pi = 592$ MeV

Fig.III.10 : $T_{\pi} = 704 \text{ MeV}$
 $T_{\pi} = 975 \text{ MeV}$
 et $T_{\pi} = 1300 \text{ MeV}$

Les points expérimentaux représentés par I sont ceux de C.B. Chiu et al. (78).

Fig. III.11 à III.14 : Sections efficaces différentielles $\frac{d\sigma}{d\Omega} (\text{mb/sr})$
 de la diffusion élastique π^+p pour différentes valeurs
 de T_{π} .

Fig.III.11 : $T_{\pi} = 410 \text{ MeV}$

Fig.III.12 : $T_{\pi} = 533 \text{ MeV}$

Fig.III.13 : $T_{\pi} = 698 \text{ MeV}$
 et $T_{\pi} = 990 \text{ MeV}$

Fig.III.14 : $T_{\pi} = 1080 \text{ MeV}$
 et $T_{\pi} = 1579 \text{ MeV}$

Les points expérimentaux sont représentés comme suit :

- Δ P.O. Ogden et al. (75)
- P.J. Duke et al. (77)
- J.A. Helland et al. (79)

Fig. III.15 à III.17 : Sections efficaces différentielles à 0° , $\frac{d\sigma}{d\Omega} (\text{mb/sr})$
 en fonction de T_{π} .

Fig.III.15 : Réaction $\pi^-p \rightarrow \pi^0 n$.

Fig.III.16 : Diffusion élastique $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$

Fig.III.17 : Diffusion élastique $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$

Les points expérimentaux sont représentés de la même façon que dans les
 Fig. III.3 à III.14.

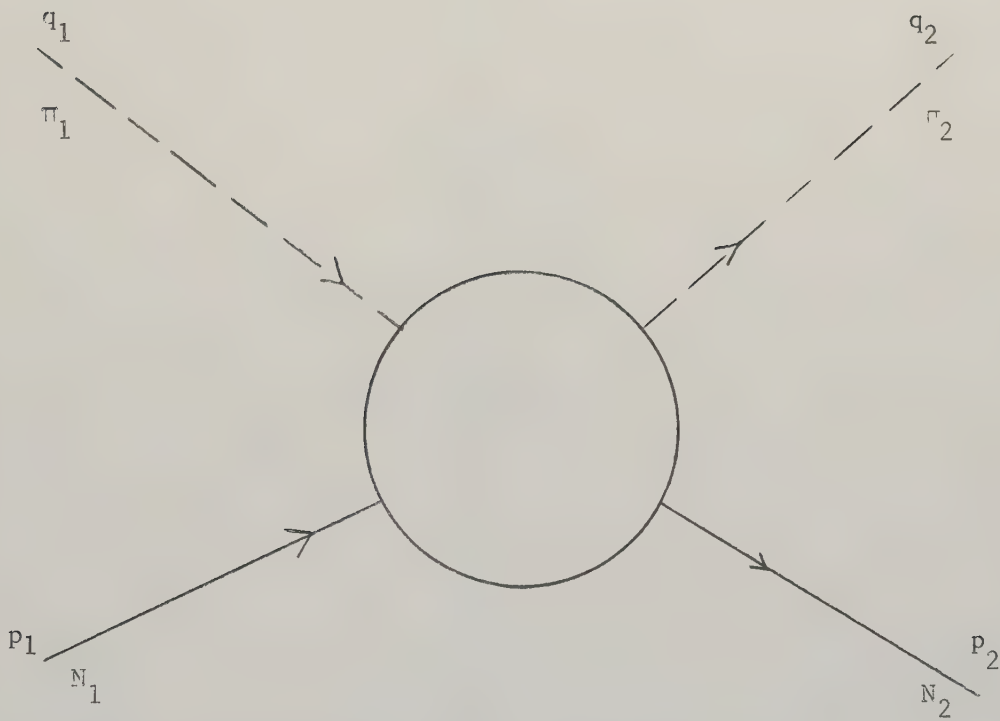


Fig. I .1

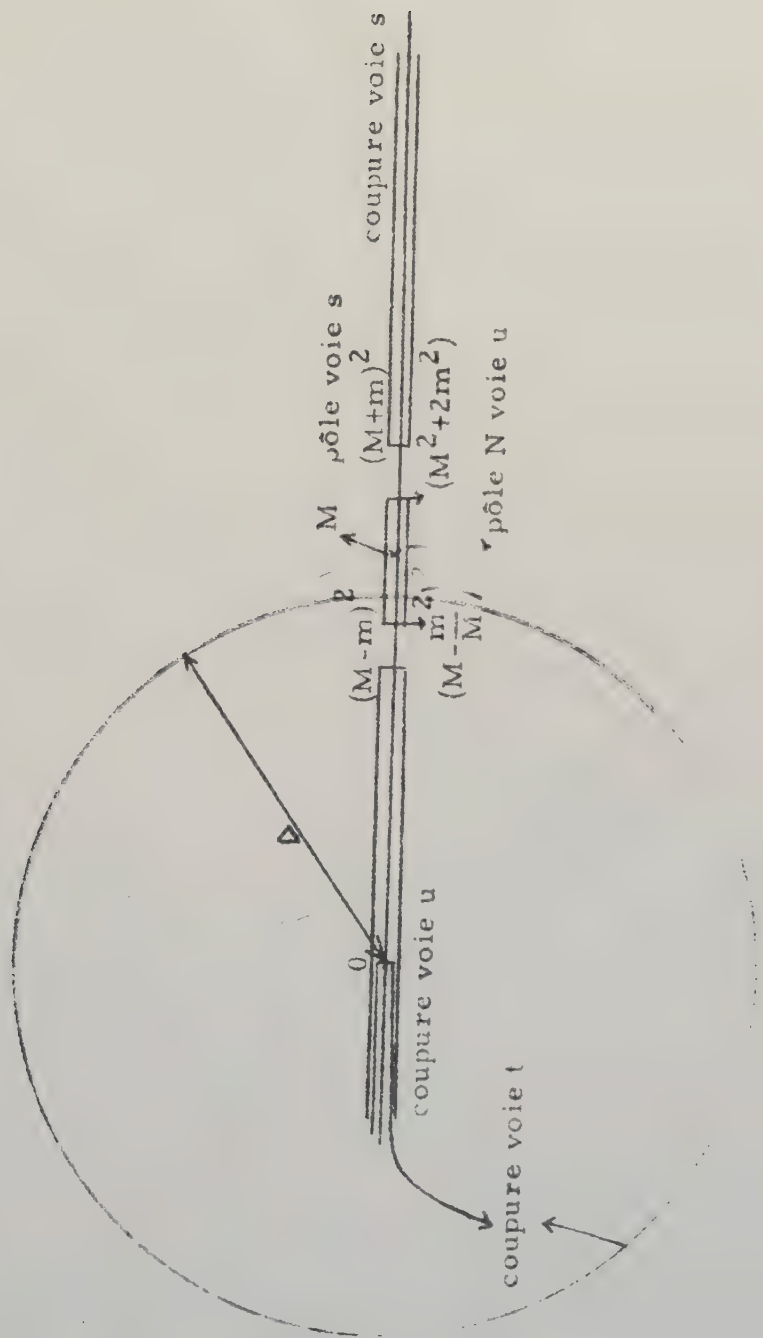


Fig. I.2

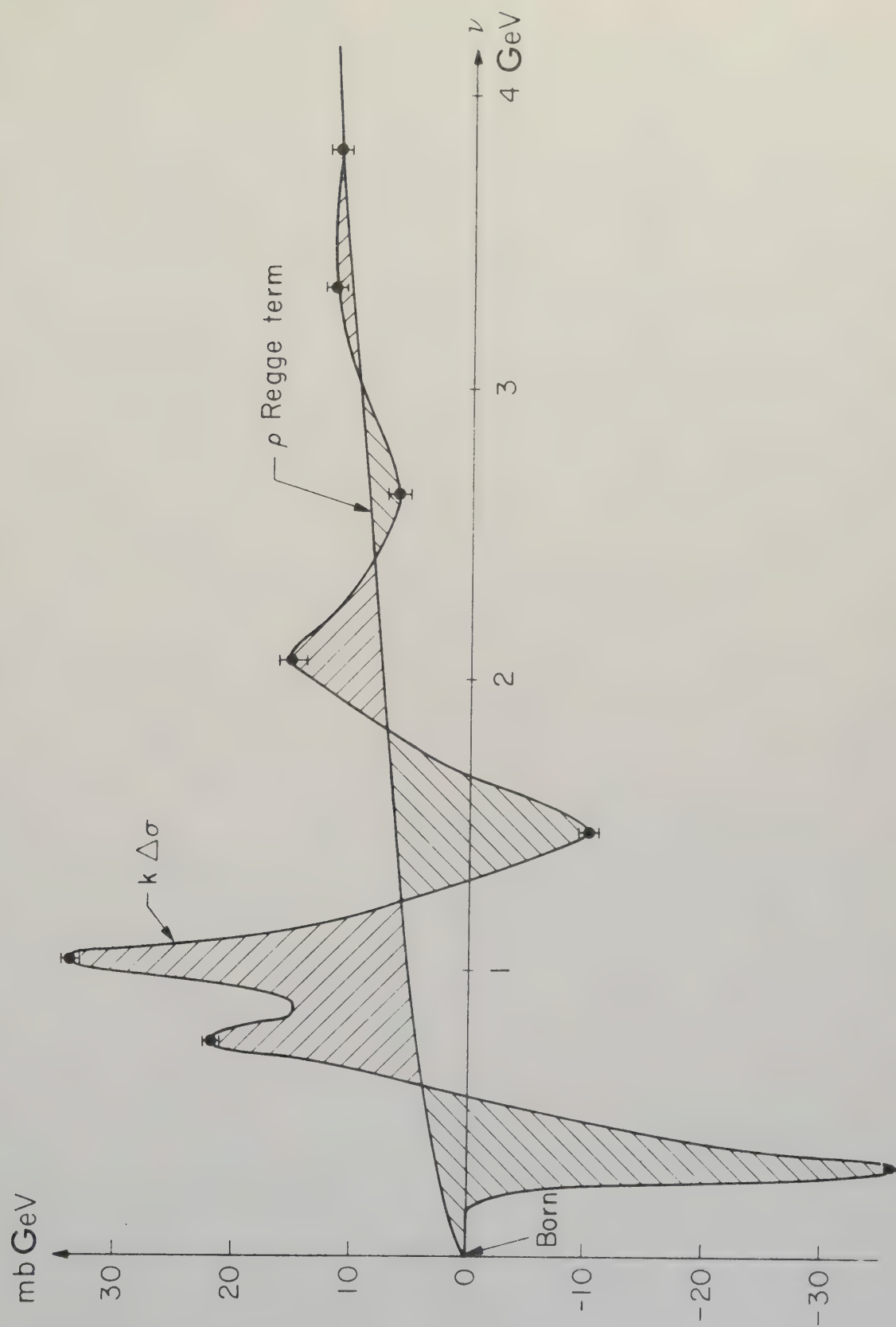


Fig. II.1

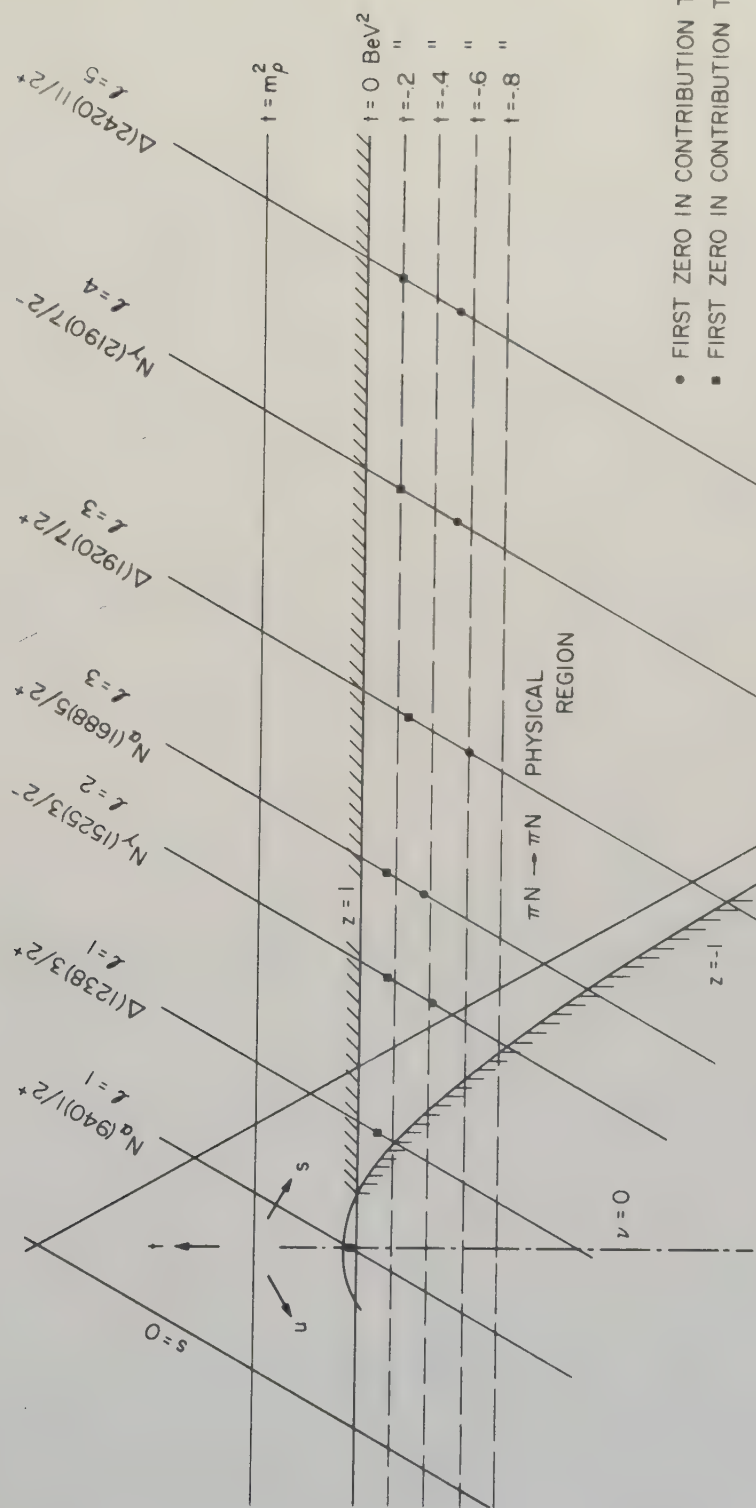


Fig. II.2

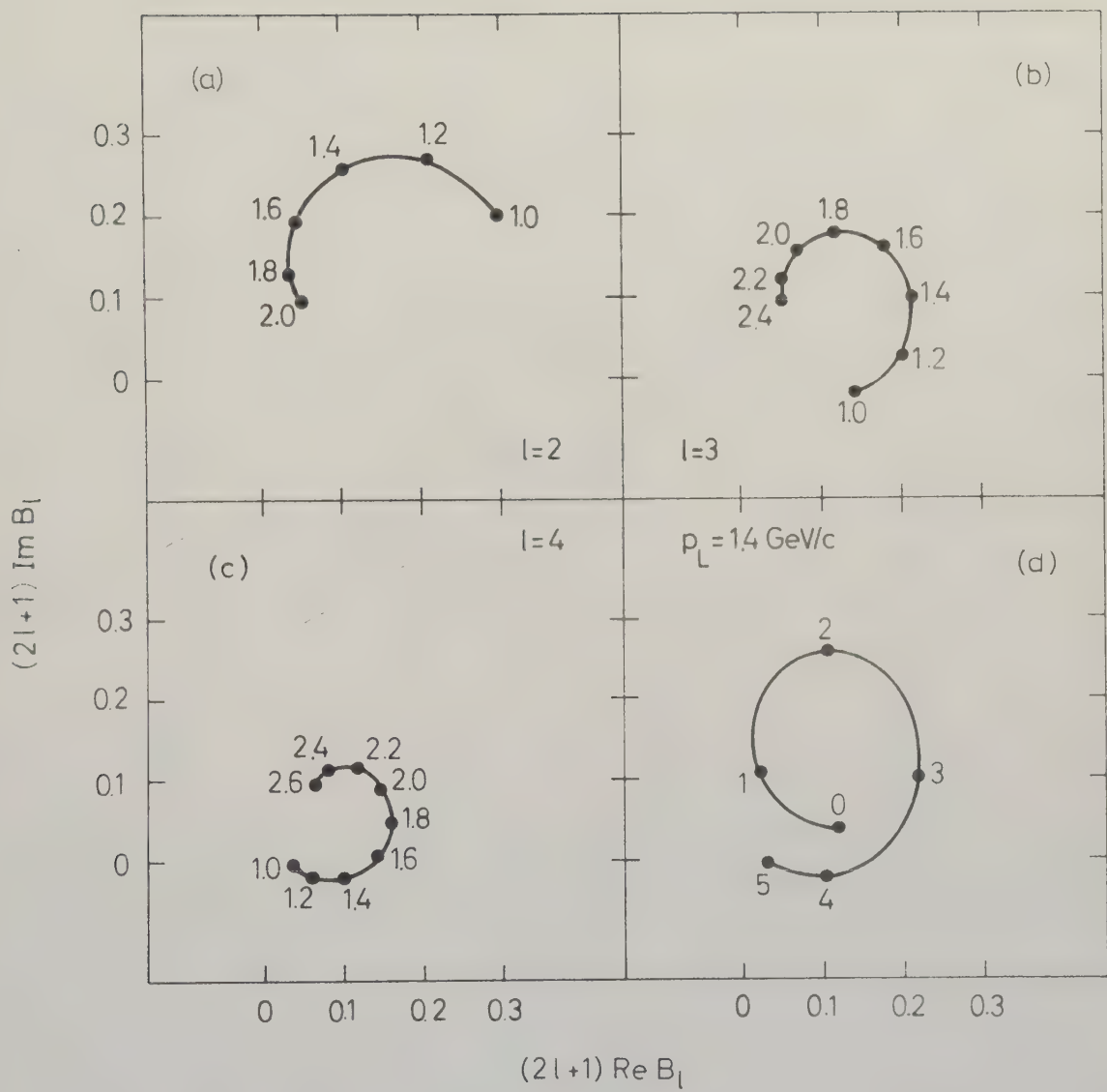


Fig. II.3

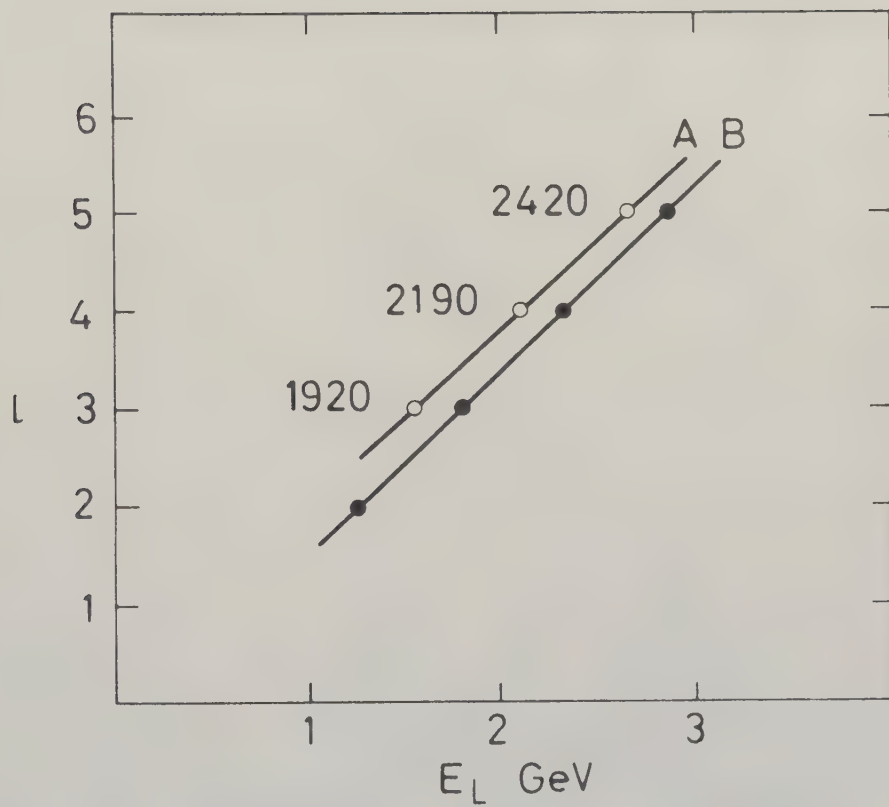


Fig. II.4

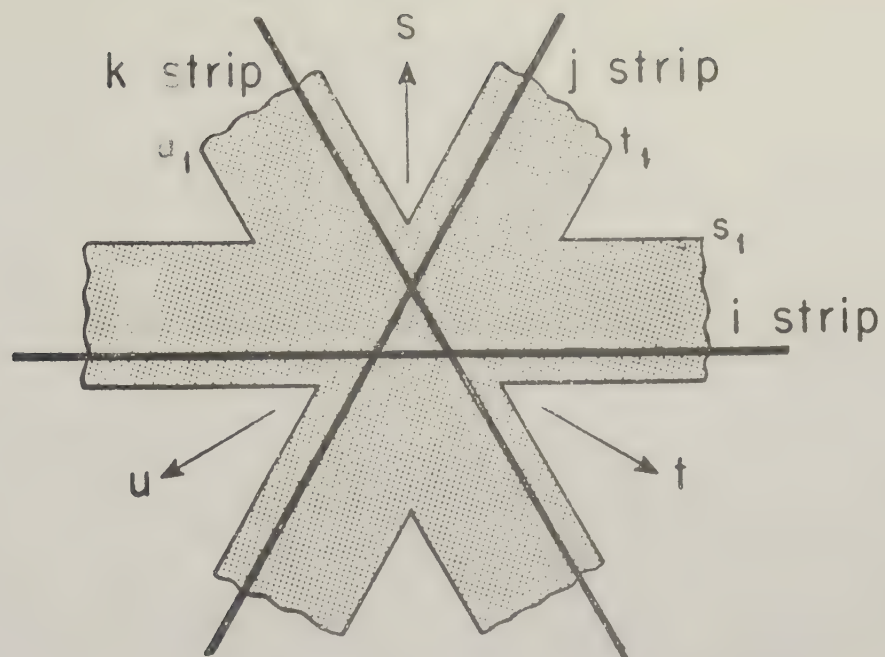


Fig. III.1

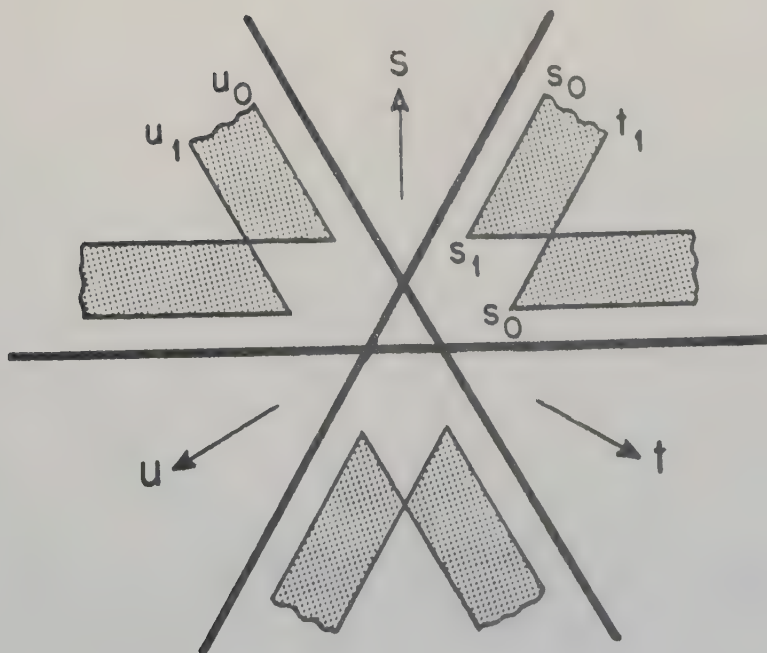


Fig. III.2

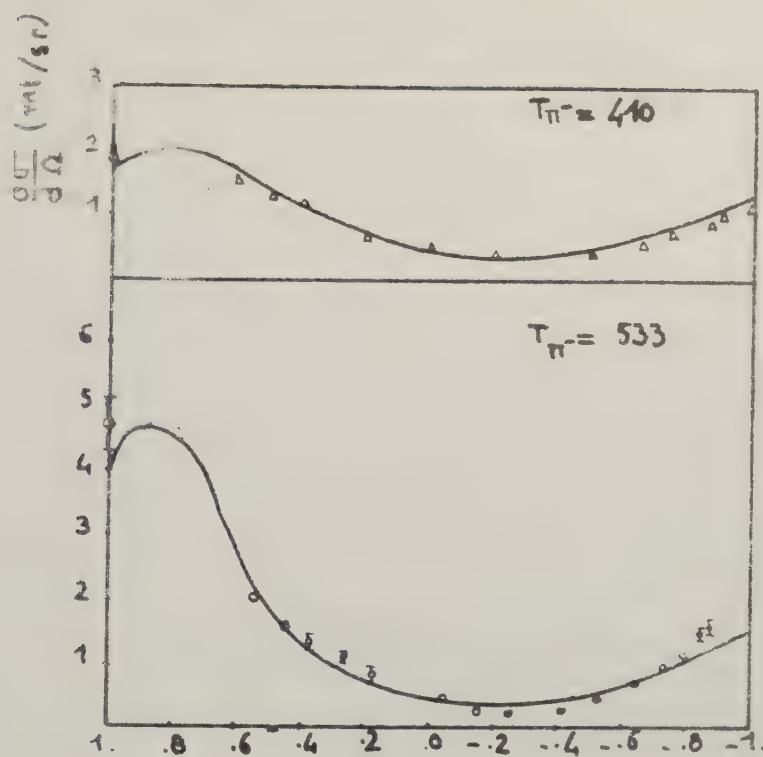


Fig. III.3

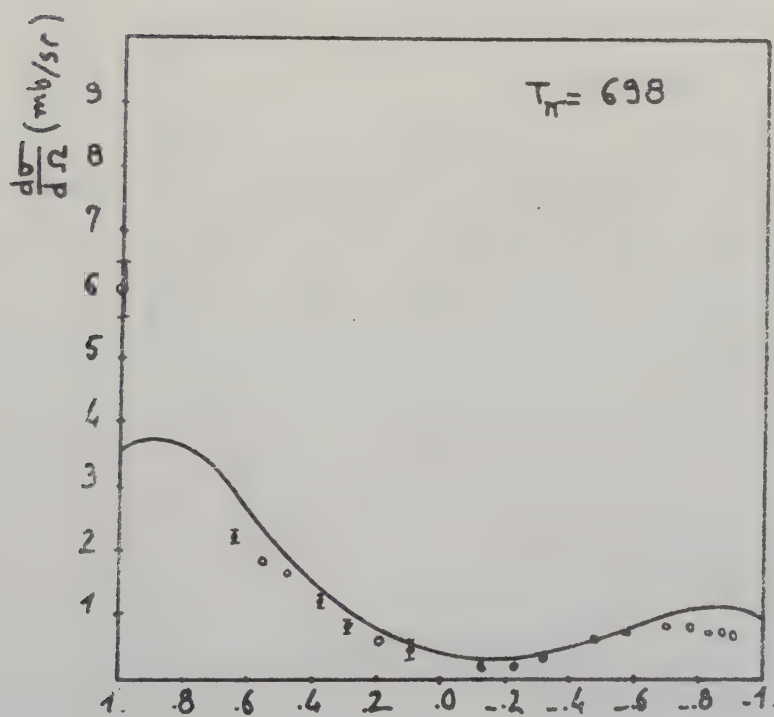


Fig. III.4

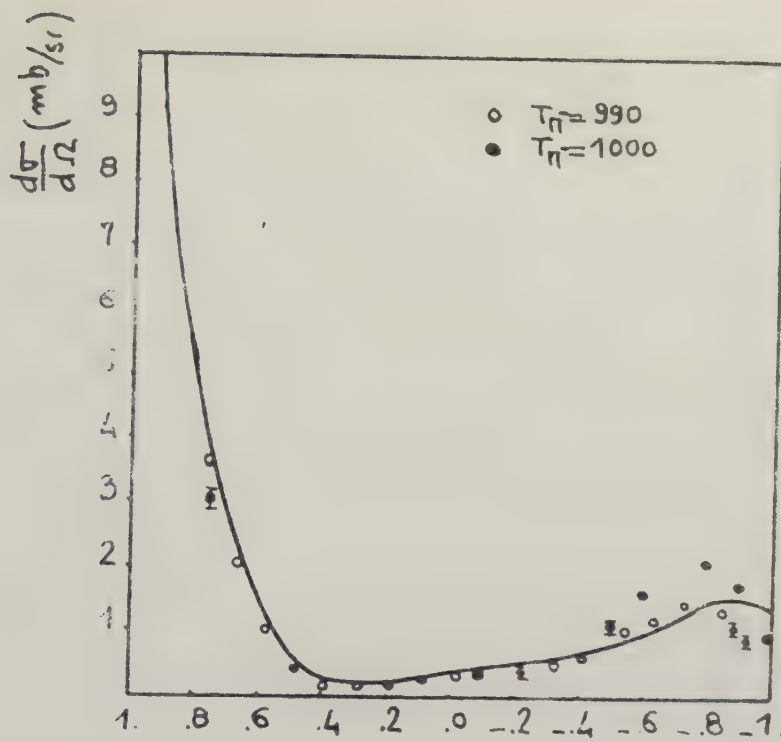


Fig. III.5

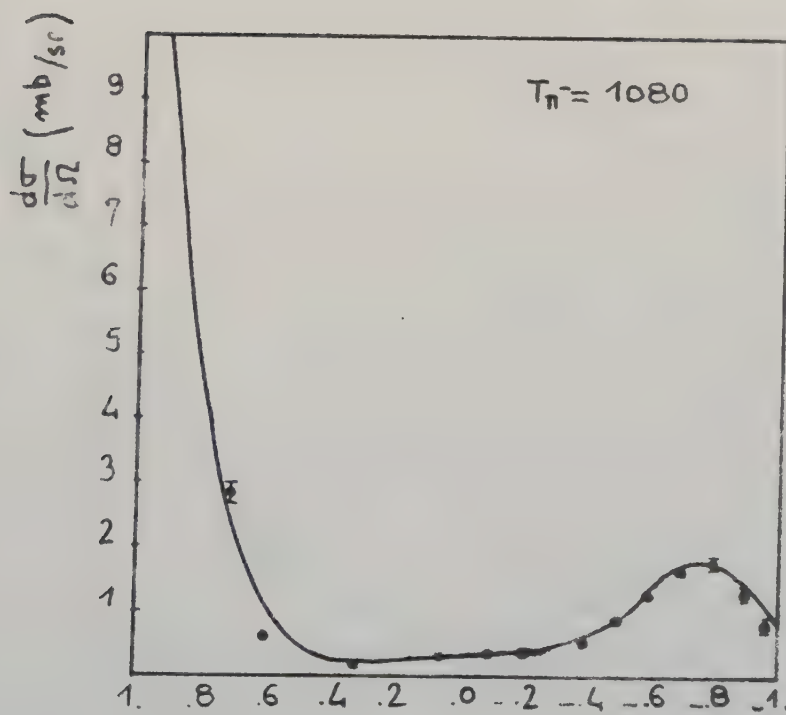


Fig. III.6

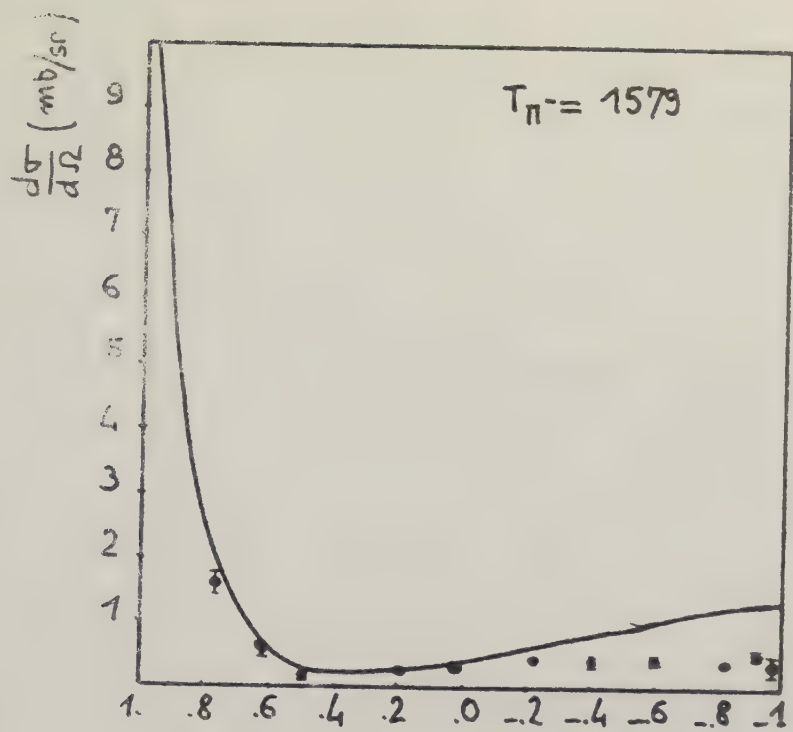


Fig. III.7

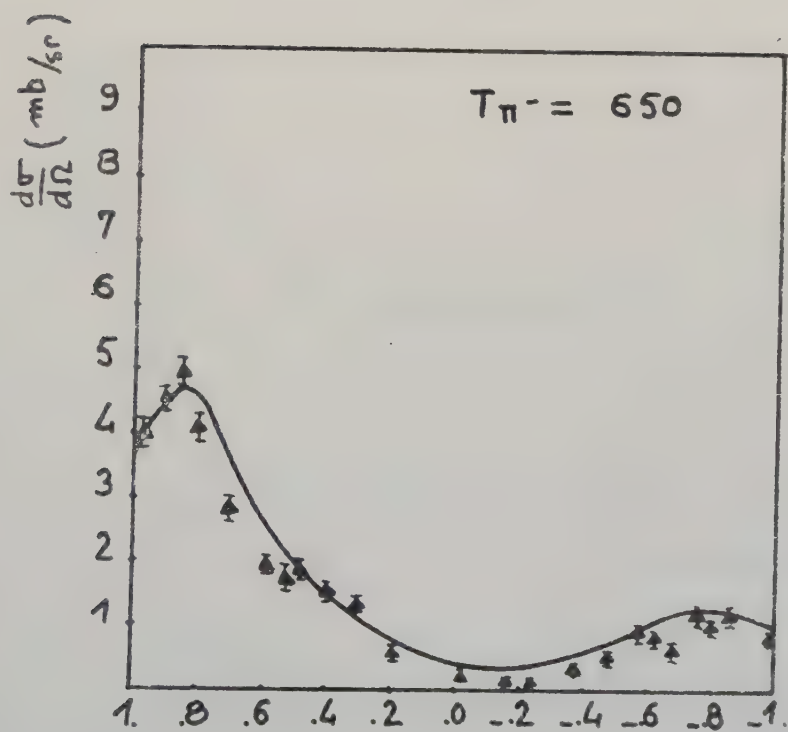


Fig. III.8

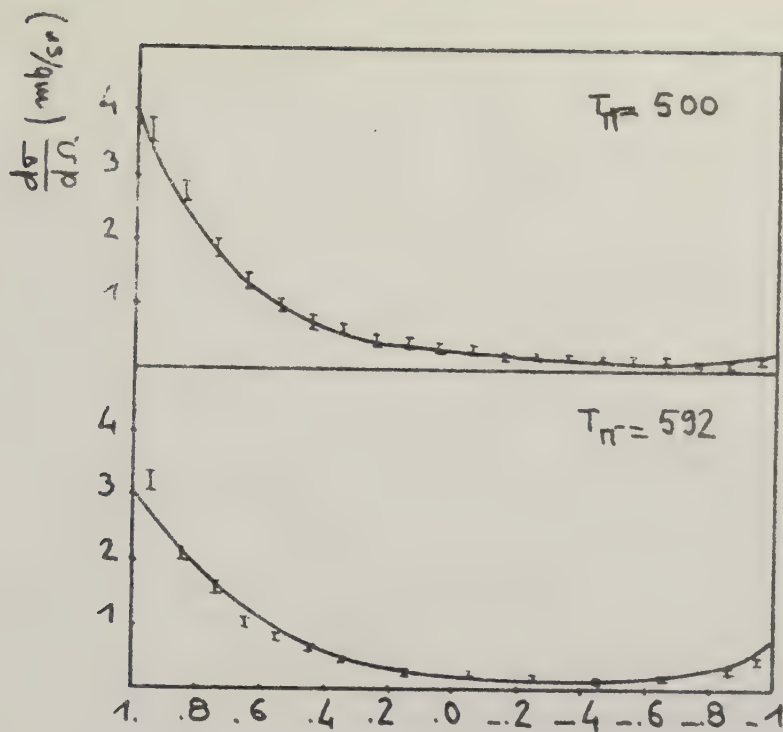


Fig. III.9

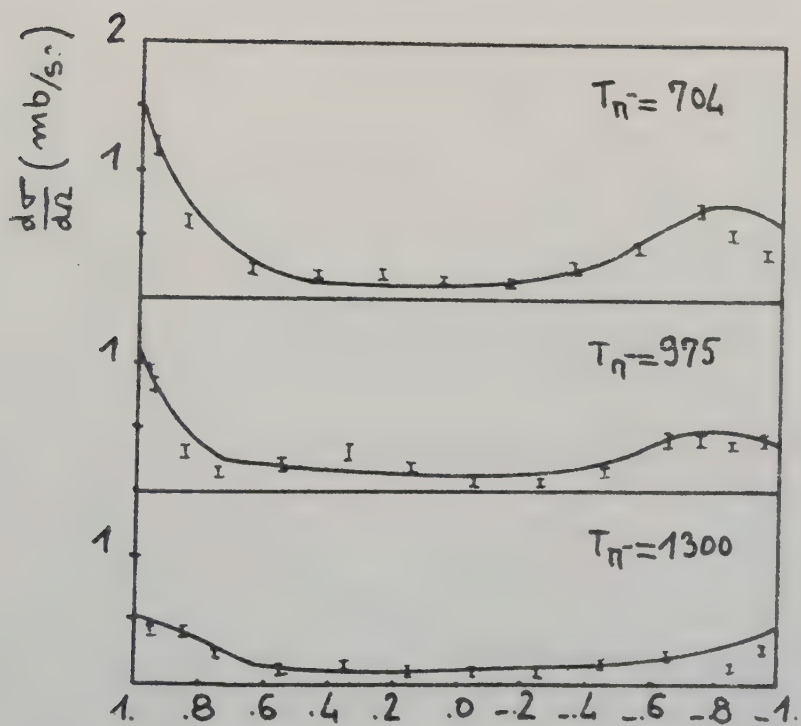


Fig. III.10

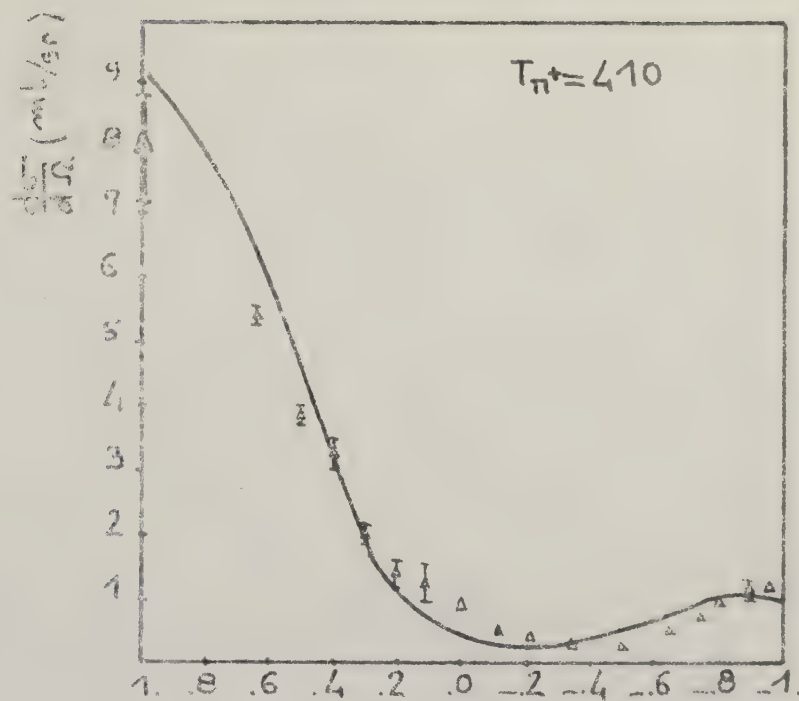


Fig. III.11

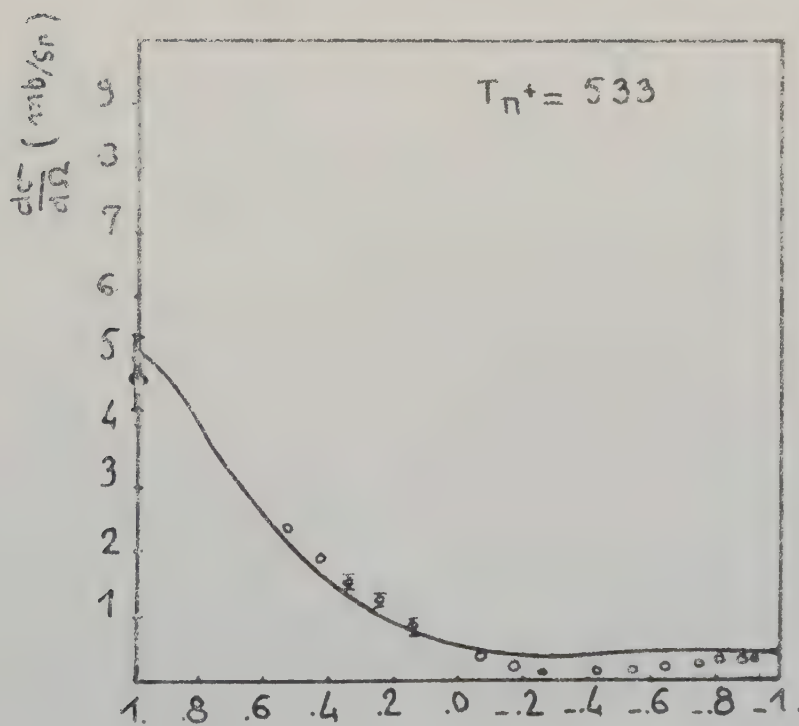


Fig. III.12

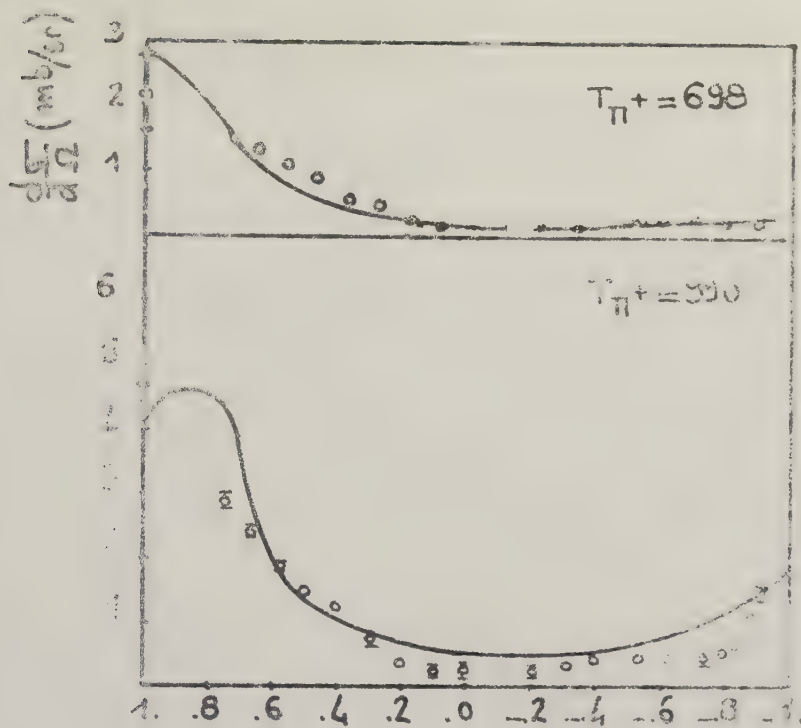


Fig. III.13

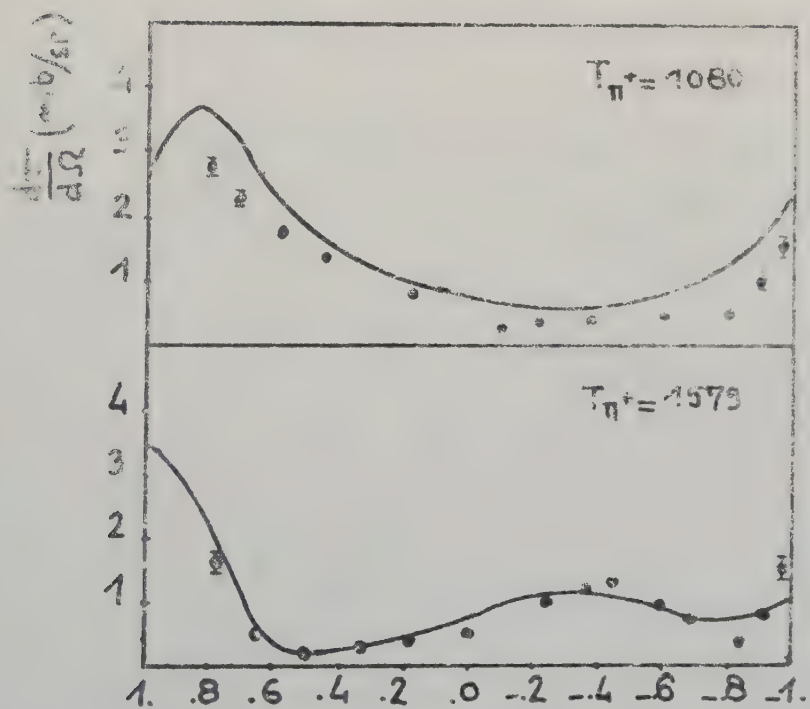


Fig. III.14

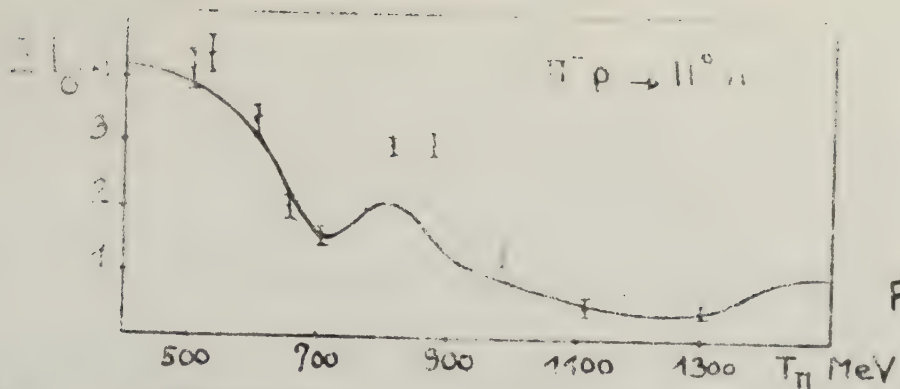


Fig. III.15

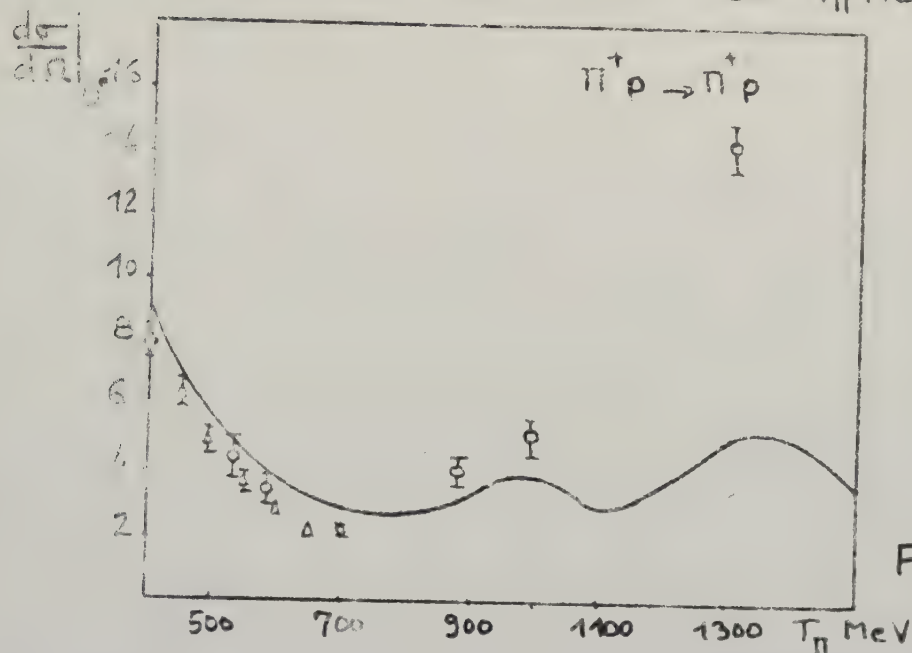


Fig. III.16

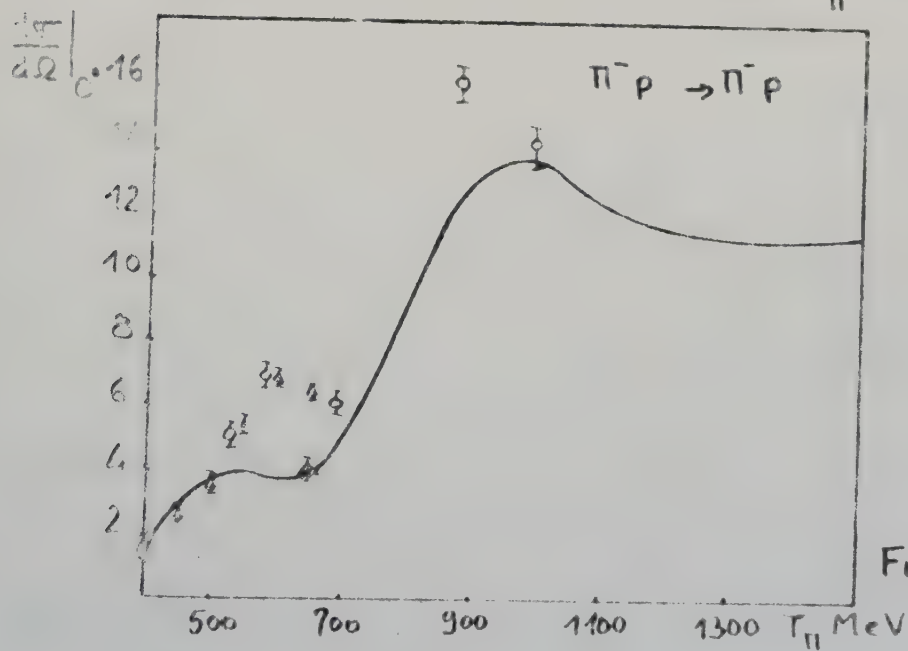


Fig. III.17

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

" Production multiple à hautes énergies ."

Vu et approuvé

Paris, le 8 Septembre 19... 70

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc. ZAMANSKY

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Robert MALLET

